This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

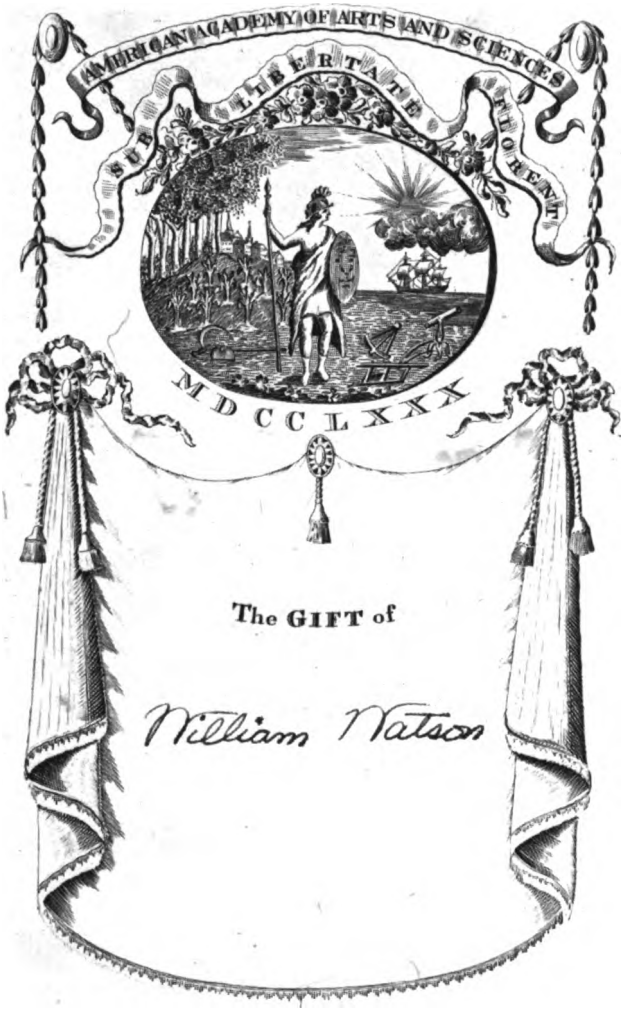
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

KG
6202
NEDL TRANSFER
HN 346Q 3
3.11
Un 3
Digitized by Google

B. 11
Un 3
KG6202



The GIFT of

William Watson

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Projectionslehre.

Digitized by Google

KGL202

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Digitized by Google

Projections

Projectionslehre

(Géométrie déscriptive)

von

E. Baron Ungern-Sternberg,

Kais. Russ. Ingenieur-Capitain a. D.

Mit zwölf lithographirten Tafeln.

Leipzig:
F. A. Brockhaus.

1828.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Unter denjenigen Zweigen der mathematischen Wissenschaften, deren Kenntniss bei dem Gebildeten jedes Standes vorausgesetzt wird, und welche daher ein Gegenstand des allgemeinen Unterrichts geworden sind, hat bisher die Projectionslehre, oder die Lehre von den geometrischen Constructionen im Raume, in den deutschen Provinzen des russischen Reiches und, wie es scheint, in Deutschland selbst noch selten ihren Platz gefunden.

Gleichwohl *verdient* sie denselben einzunehmen, sei es nun, dass man in jener Beziehung den Werth des Wissens nach dem Maasstabe der praktischen Nützlichkeit schätze, oder dass man durch Erlangung von Kenntnissen geistige Ausbildung überhaupt vermöge geistiger Thätigkeit beabsichtige.

Zu den zahlreichen praktischen Anwendungen der Projectionslehre gehören nämlich dem geometrischen Theile nach: die Kunst der Anfertigung aller Arten von Karten, Rissen und Plänen; die Bestimmung der linearen Begränzungen, der natürlichen und Schlagschatten, so wie des höchsten Lichtes von Körpern, welche geometrischer Definitionen fähig sind, aus Gesichtspunkten in jeder Lage, und für Bildflächen von jeder geometrischen Form (Geometrische Zeichenkunst und Linear-Perspective); ferner, die Zimmermanns-, Steinhauer- und Terrassirkunst, so wie überhaupt alle Künste, welche sich mit der Bearbeitung roher Stoffe zu irgend einer be-

Digitized by Google

absichtigten und zugleich geometrisch fasslichen Form beschäftigen. — Alle diese Anwendungen entspringen aus allgemeinen geometrischen Methoden, die vermöge ihrer Allgemeinheit und Eleganz, einmal aufgefasst, nicht leicht wieder vergessen werden.

Wenn nun im bürgerlichen Leben auch denen, die weder Ingenieure, noch Architekten sind, es gewiss oft wünschenswerth erscheint, in einer oder der andern dieser Künste erfahren zu sein, sowohl zu eigner Ausübung, als zur Beurtheilung fremder Arbeiten, so wird man der hierzu führenden wissenschaftlichen Methode den Vorzug vor den, wo nicht ganz technischen, doch zerstreuten, unzusammenhängenden und folglich das Gedächtniss beschwerenden, Vorschriften einräumen müssen, wie sie in den besonders über diese Gegenstände handelnden Büchern ertheilt werden.

Nicht weniger nützlich wird sich die Projectionslehre zur Schärfung des Verstandes und der Urtheilskraft, oder als geistiges Bildungsmittel, erweisen. Da nämlich ihr Zweck die Auflösung geometrischer Probleme im Raume durch Construction auf einer ebenen Fläche ist, so verlangt sie ihrer Natur nach ein vollständiges Begreifen geometrischer Gegenstände und der aus ihrer verschiedenen Form und Lage entspringenden geometrischen Wahrheiten, sowohl im Raume in der blossen Idee, als auf einer Ebene im geometrischen Bilde. Die hierzu nicht in geringem Maasse erforderliche Anstrengung muss dazu beitragen, dem Geiste überhaupt Klarheit und eine gewisse Richtung gegen das Positive zu geben.

Aus diesen Gesichtspunkten in Frankreich von berühmten Männern aufgestellt, hat die Projectionslehre dort allgemeinen Eingang gefunden und wirkt, verbunden mit dem allgemein verbreiteten Unterrichte in der Mechanik, fortwährend dahin, das blosse technische Verfahren in den Künsten und Gewerben durch sichere wissenschaftliche Methoden zu verdrängen, so wie jene für die bürgerliche Wohlfahrt so wünschenswerthe Richtung des Nationalgeistes zu beleben und hervorzurufen.

Es konnten aber die Franzosen hierin den Deutschen vorangehen,

Digitized by Google

weil, abgesehen von andern Gründen, diese Wissenschaft, als bei ihnen entsprungen, auch mit regerem Interesse aufgefasst, von Männern vom Fache, sowohl für solche, als auch in elementarischer Form, bearbeitet wurde. Allen diesen Werken liegen grössten Theils die Arbeiten Monge's zum Grunde, dem die Projectionslehre ihr Bestehen als Wissenschaft verdankt, indem er zuerst unter dem Titel Géométrie déscriptive die zerstreuten geometrischen Proceduren der Architekten und anderer Künstler nach ganz neuen Methoden zu einem wissenschaftlichen Ganzen vereinigte. In deutscher Sprache hingegen ist, so viel mir bekannt ist, wenig über diesen Gegenstand erschienen. Eine Uebersetzung von Lacroix's Complément de Géométrie ist wohl nicht mit der gehörigen Sorgfalt angefertigt und kann aus diesem Grunde nur denen ganz verständlich und brauchbar werden, die schon einige Kenntniss des Stoffes besitzen.

Es hat daher der Wunsch, zur allgemeinen Verbreitung der Projectionslehre unter Deutschen beizutragen, die vorliegende Arbeit veranlasst, welche, aus diesem Gesichtspunkte abgefasst, die Nachsicht der Gelehrten dieser Nation in Anspruch nimmt. Jede Beurtheilung competenter Richter kann mir nur zur Belehrung oder Aufmunterung dienen.

Dem beabsichtigten Zwecke gemäss setzt der Inhalt dieser kleinen Schrift nur einige Kenntniss der Elementar-Geometrie voraus und beschränkt sich, mit Ausnahme einiger Beispiele, auf die allgemeinen Methoden, welche zur Auflösung geometrischer Probleme im Raume durch Construction führen. In der Form und Anordnung bin ich hierin grössten Theils dem jetzigen General Potier in seinem Traité de Géométrie déscriptive à l'usage des élèves de l'institut des voyes de communication. St. Petersbourg chez Pluchart, gefolgt, weil mich die Erfahrung von der Zweckmässigkeit derselben überzeugt hat. Die Anwendungen der Projectionslehre, sowohl auf rein mathemathische Probleme durch Combination jener Methoden, als auch in der Praxis auf die Künste, werden, wenn dieser Versuch eine günstige Aufnahme findet, besonders erscheinen.

Ich habe die französische Benennung, Géométrie déscriptive, der Lehre

Digitized by Google

von den geometrischen Constructionen im Raume weder beibehalten, noch übersetzen wollen, weil der Sinn derselben ziemlich versteckt liegt und einer Umschreibung bedarf, um verständlich zu werden. Bezeichnender ist mir dagegen der Ausdruck „*Projectionslehre*“ erschienen, indem die Géométrie déscriptive ganz auf der Methode der Projectionen beruht, und ich habe daher diesen Ausdruck für die *Methode* im engern Sinne auf die wissenschaftlichen Folgerungen aus derselben ausdehnen zu dürfen geglaubt. Eben so bin ich genöthigt gewesen, denjenigen krummen Flächen, welche die Franzosen surfaces gauches nennen, einen Namen zu geben, und habe sie *gewundene Flächen* genannt; es liegt nämlich in ihrer Gestalt vermöge ihrer Entstehung etwas Gewundenes, Verdrehtes oder Gezwungenes, das man auch sonst wohl in diesem Sinne mit *windschief* bezeichnet, und dem der französische Ausdruck entspricht. Andere allgemein verständliche Benennungen sind entweder ihrer Kürze wegen beibehalten, oder direct übertragen worden.

Was das Aeussere des Buchs anbetrifft, so hätte dasselbe ohne Zweifel eleganter ausfallen können, wenn es nicht dem beabsichtigten Zwecke gemäss erforderlich gewesen wäre, einen möglichst wohlfeilen Preis zu berücksichtigen. Die Figuren sind daher nach einem kleinen Maasstabe gezeichnet und lithographirt worden, wodurch sie indessen an Verständlichkeit nicht verloren haben. Die bei aller Sorgfalt sich dennoch eingeschlichenen Fehler in der Bezeichnung der Linien durch Buchstaben wird der Leser gebeten nach der Anzeige zu verbessern.

Dorpat, im Februar 1827.

U. St.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Vorwort. v

Erster Abschnitt.

Von Punkten, geraden Linien und Ebenen.

Zweck und Methode der Projectionslehre, Definitionen 1

I. Aufgabe.

Die Projectionen einer Linie zu finden, die durch zwei gegebene Punkte geht 8

II. Aufgabe.

Aus den gegebenen Projectionen einer Linie die Länge, eines von zwei bestimmten Punkten eingeschlossenen Theiles derselben zu finden 8

III. Aufgabe.

Die Durchschnittspunkte einer gegebenen geraden Linie mit den Projectionsebenen zu finden . 9

IV. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Linie eine parallele Linie zu führen 10

V. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte im Raume auf eine gegebene Ebene eine senkrechte Linie zu fällen 10

VI. Aufgabe.

Einer gegebenen Ebene durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu führen 11

Digitized by Google

Seite

VII. Aufgabe.

Wenn zwei Ebenen gegeben sind, den diesen Ebenen gemeinschaftlichen Durchschnitt zu finden . 11

VIII. Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, die Tracen der diese Linien enthaltenden Ebene zu finden 14

IX. Aufgabe.

Die Projectionen eines Punktes zu finden, der in einer gegebenen Ebene enthalten sein soll . . 14

X. Aufgabe.

Eine gegebene Ebene mit einem in derselben gegebenen Punkte auf eine der Projectionsebenen herabzuschlagen 15

XI. Aufgabe.

Durch eine gegebene Linie eine Ebene einer zweiten gegebenen Linie parallel zu führen . . 16

XII. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zweien gegebenen Linien parallel zu führen 16

XIII. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer gegebenen Linie mit einer gegebenen Ebene zu construiren 16

XIV. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Linie eine perpendiculäre Ebene zu führen. . . 17

XV. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Linie eine Perpendiculäre zu errichten . . . 17

XVI. Aufgabe.

Durch eine gegebene Linie eine einer gegebenen Ebene perpendiculäre Ebene zu legen . . . 17

XVII. Aufgabe.

Den Winkel zu construiren, den eine gegebene Ebene mit einer gegebenen Linie bildet . . . 18

XVIII. Aufgabe.

Den Winkel zu construiren, den zwei gegebene Ebenen mit einander bilden 18

XIX. Aufgabe.

Die Projectionen eines gegebenen Winkels zu bestimmen, wenn die Winkel bekannt sind, unter welchen die Schenkel desselben gegen die horizontale Projectionsebene geneigt sind, und die Neigung der Ebene des Winkels gegen die horizontale Projectionsebene zu finden . . . 18

XX. Aufgabe.

Wenn eine Ebene und eine in derselben enthaltene Linie gegeben sind, durch diese Linie eine Ebene zu führen, welche mit der gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bilde 20

XXI. Aufgabe.

Wenn zwei Linien gegeben sind, die nicht in einer Ebene liegen, die kürzeste Entfernung dieser Linien von einander zu finden 21

Digitized by Google

Seite

XXII. Aufgabe.

Von gegebenen Projectionsebenen vermittelst bekannter Projectionen auf andere Projectionsebenen überzugehen 22

Zweiter Abschnitt.

Von krummen Flächen, ihren berührenden Ebenen und Normalen.

Von krummen Flächen überhaupt 23
1. Die Cylinderflächen 24
2. Die Kegelflächen 25
3. Die Umwälzungsflächen 26
4. Die gewundenen Cylinderflächen 27

Von den entwickelungsfähigen Flächen 30

I. Aufgabe.

Wenn eine Cylinderfläche durch die Projectionen der Directrice und einer Generatrice, oder eine Kegelfläche durch die Projectionen der Directrice und des Scheitels gegeben ist, die Basis einer dieser Flächen zu construiren 31

II. Aufgabe.

Wenn eine Cylinderfläche durch ihre Basis und eine Generatrice, oder eine Kegelfläche durch ihre Basis und den Scheitel gegeben ist, durch einen Punkt auf einer dieser Flächen derselben eine berührende Ebene und Normale zu führen 32

III. Aufgabe.

Durch einen im Raume ausserhalb einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche gegebenen Punkt einer dieser Flächen eine berührende Ebene zu führen 32

IV. Aufgabe.

Einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche einer gegebenen Linie parallel eine berührende Ebene zu führen 33

V. Aufgabe.

Einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche einer gegebenen Ebene parallel eine Normale zu führen 34

VI. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt im Raume ausserhalb einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche einer dieser Flächen eine Normale zu führen 35

VII. Aufgabe.

Wenn die Axe und die Generatrice einer Umwälzungsfläche gegeben sind, die ebene Generatrice, oder die Section der Fläche mit der der verticalen Projectionsebene parallelen Meridianebene zu construiren 35

Digitized by Google

Seite

VIII. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt auf einer durch ihre Axe und ebene Generatrice gegebenen Umwälzungsfläche derselben eine berührende Ebene und Normale zu führen 36

IX. Aufgabe.

Einer gegebenen Umwälzungsfläche einer gegebenen Linie parallel einen umhüllenden Cylinder, oder aus einem gegebenen Punkte einen umhüllenden Kegel zu führen 37

X. Aufgabe.

Durch eine gegebene gerade Linie einer gegebenen Umwälzungsfläche eine berührende Ebene zu führen 39

XI. Aufgabe.

Einer gegebenen Umwälzungsfläche durch einen gegebenen Punkt ausserhalb derselben eine Normale zu führen 40

XII. Aufgabe.

Einer Umwälzungsfläche einer geraden Linie parallel eine Normale zu führen 40

XIII. Aufgabe.

Einer Umwälzungsfläche einer Ebene parallel eine berührende Ebene zu führen 41

XIV. Aufgabe.

Wenn ein Punkt auf einer der Directricen einer gewundenen Cylinderfläche gegeben ist, die diesem Punkte correspondirende Generatrice zu construiren 41

XV. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer gewundenen Cylinderfläche mit einer der verticalen Projectionsebene parallelen Ebene, oder eine ebene Directrice der Fläche zu construiren 41

XVI. Aufgabe.

Die transversale Generatrice zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt auf einer gewundenen Ebene geht 42

XVII. Aufgabe.

Einer gewundenen Ebene in einem auf derselben gegebenen Punkte eine berührende Ebene zu führen 42

XVIII. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche in einem auf derselben gegebenen Punkte eine berührende Ebene und Normale zu führen 43

XIX. Aufgabe.

Den Berührungspunkt einer Ebene mit einer gewundenen Cylinderfläche zu finden, wenn die Ebene durch eine Generatrice der Fläche geht 44

XX. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche durch eine gerade Linie ausserhalb derselben eine berührende Ebene zu führen 45

Digitized by Google

Seite

XXI. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche einer geraden Linie parallel einen umhüllenden Cylinder, oder aus einem Punkte einen umhüllenden Kegel zu führen 46

XXII. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche durch einen Punkt ausserhalb derselben eine Normale zu führen 47

XXIII. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche einer Ebene parallel eine berührende Ebene zu führen . . . 47

XXIV. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche einer gegebenen Ebene parallel eine Normale zu führen . . . 48

XXV. Aufgabe.

Einer Umwälzungs- oder gewundenen Cylinderfläche eine berührende Ebene zu führen, welche zugleich eine Cylinder- oder Kegelfläche berühre 48

XXVI. Aufgabe.

Eine Fläche zu construiren, welche durch die Bewegung einer geraden Linie längs dreier Linien hervorgebracht wird 49

Dritter Abschnitt.

Von Durchschnitten krummer Flächen.

I. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer geraden Linie zu construiren . . 51

II. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer Ebene, und die wahre Gestalt dieses Durchschnitts in der schneidenden Ebene zu construiren 51

III. Aufgabe.

Die Entwickelung eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis und die Gestalt einer auf dem Kegel befindlichen krummen Linie in der entwickelten Kegelfläche zu construiren 52

IV. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Umwälzungsfläche mit einer Ebene zu construiren 53

V. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer geraden Linie mit einer Umwälzungsfläche zu construiren 53

VI. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Ebene mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren 54

VII. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer geraden Linie mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren . . 54

Digitized by Google

Seite

VIII. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Cylinderflächen zu construiren 54

IX. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Kegelfläche zu construiren 55

X. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Kegelflächen zu construiren 55

XI. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer Umwälzungsfläche zu construiren . 56

XII. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren 56

XIII. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Umwälzungsflächen mit einander zu construiren 56

XIV. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Umwälzungsfläche mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren . 58

XV. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier gewundenen Cylinderflächen zu construiren 58

XVI. Aufgabe.

Einer durch den Durchschnitt zweier Flächen gebildeten krummen Linie in einem Punkte auf derselben eine Tangente zu führen 58

XVII. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt ausserhalb einer gegebenen, durch den Durchschnitt zweier krummen Flächen gebildeten Curve von gedoppelter Krümmung derselben eine Tangente zu führen 60

XVIII. Aufgabe.

Einer durch den Durchschnitt zweier krummen Flächen gebildeten Curve von gedoppelter Krümmung einer gegebenen Linie parallel eine Tangente zu führen 60

Digitized by Google

Verbesserungen.

Tab. I. Fig. 8. Statt a oberhalb der Linie AB setze man c; statt a unterhalb der Linie AB setze man a′; statt d setze man a; statt c setze man c′.

— II. — 10. In den Durchschnittspunkt der Linien HG und C′D′ setze man m; in den Durchschnittspunkt der Linien HG und k′l′ setze man f′.

— III. — 14. Statt g oberhalb der Linie AB setze man g′; statt o′ setze man o; statt k setze man o′.

— VI. — 18. Statt H oberhalb der Linie AB setze man H′.

— VII. — 20. An die Linie E′F′ setze man F⁴ oberhalb F′.

— XII. — 29. Statt D′ oberhalb der Linie AB setze man d′; statt D″ oberhalb der Linie AB setze man d″.

Digitized by Google

Digitized by Google

Projectionslehre.

Erster Abschnitt.

Von Punkten, geraden Linien und Ebenen.

Die Projectionslehre beschäftigt sich mit der graphischen Auflösung geometrischer Aufgaben im Raume, indem sie Anweisung ertheilt, die Lage von Punkten und die geometrischen Eigenschaften von Linien, Flächen und Körpern, die einem geometrischen Bildungsgesetze unterworfen sind, in Beziehung auf die drei Dimensionen des Raumes, solchergestalt auf einer *Ebene* darzustellen, dass die aus jenen Eigenschaften zwischen Punkten, Linien und Körpern hervorgehenden und im Raume stattfindenden geometrischen Wahrheiten auf dieser Ebene durch eine *ebene Construction* aufgefunden werden können.

Wir müssen uns daher mit der hierzu erforderlichen *Methode* bekannt machen, bevor wir zur graphischen Auflösung geometrischer Probleme übergehen.

Die *vollständige* geometrische Darstellung der räumlichen Eigenschaften eines Gegenstandes auf *einer* Ebene erfordert die *besondere* Kenntniss dieser Eigenschaften in Bezug auf *mehrere* Ebenen, deren Lage als bekannt vorausgesetzt ist, oder die *Bestimmung* des Gegenstandes in Bezug auf diese Ebenen. Wir haben daher zu untersuchen, wie eine solche Bestimmung stattfinden kann; und da der *Punkt* der einfachste Gegenstand ist, den die Geometrie darbietet, zugleich auch alle Linien, Flächen und Körper als aus Punkten zusammengesetzt angesehen werden können, so wird uns zunächst das Verfahren zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume gegen Ebenen beschäftigen. Dieses Verfahren ist, abstract ausgedrückt, die Grundlage der analytischen Geometrie, sinnlich dargestellt aber, die Fundamentaloperation der Projectionslehre, und die solchergestalt beiden Wissenschaften gemeinschaftliche Methode wird uns um so einleuchten-

Digitized by Google

der erscheinen, wenn wir dieselbe in ihrer doppelten Anwendung, und zwar zuerst in Beziehung auf die analytische Geometrie, betrachten.

Denkt man sich im Raume drei unendlich ausgedehnte, einander gegenseitig perpendiculäre Ebenen, so werden dieselben sich in drei einander in einem Punkte perpendiculären Graden schneiden und den Raum in acht Abtheilungen theilen, von denen jede die Gestalt der körperlichen Ecke annimmt, welche der Fussboden eines rechtwinkligen Zimmers mit zwei an einander stossenden Wänden bildet. Solcher Ebenen bedient sich nun die analytische Geometrie zu ihren Bestimmungen und ertheilt ihnen den Namen *coordinirte* Ebenen. Die Linien, nach welchen dieselben sich schneiden, werden *Axen* der *Coordinaten* genannt, und der Punkt, in welchem die Axen sich begegnen, heisst der *Anfangspunkt* der Coordinaten. Von diesem Punkte aus gerechnet, wird jede der Axen in zwei Theile getheilt, die entgegengesetzte Benennungen erhalten, indem der eine Theil positiv, der andere negativ wird, und hierbei verfährt man in solcher Ordnung, dass man eine der acht Abtheilungen des Raumes als von lauter positiven, mithin die derselben entgegengesetzte als von lauter negativen Axen begränzt ansieht. Die übrigen Abtheilungen sind demnach eine jede von theils negativen, theils positiven Axen begränzt.

Jeder im Raume liegende Punkt kann vermittelst dieser Annahmen nunmehr auf das Deutlichste bezeichnet und von andern Punkten unterschieden werden, wenn dessen directe Entfernungen von den coordinirten Ebenen, oder die Länge der aus demselben auf diese Ebenen gefällten Perpendiculären gegeben ist, und man jeder dieser Perpendiculären, die zusammen den Namen *Coordinaten* führen, die positive oder negative Benennung der ihr correspondirenden oder parallelen Axe beilegt, wodurch diejenige Abtheilung des Raumes bezeichnet wird, in welcher sich der Punkt befindet. Die Anzahl der Coordinaten, die im Allgemeinen, wie man sieht, auf drei beschränkt ist, kann sich in besondern Fällen, je nachdem ein Punkt in einer der coordinirten Ebenen, einer der Axen, oder im Anfangspunkte der Coordinaten selbst liegt, auf zwei, auf eine Ordinate, oder auf Null reduciren.

Die Punkte, in welchen die Coordinaten eines Punktes im Raume die coordinirten Ebenen treffen, heissen die *Projectionen*, oder eigentlich die *orthographischen* Projectionen des Punktes, und aus der Lage derselben gegen die jeder der coordinirten Ebenen angehörigen Axen kann man unmittelbar auf die Lage des Punktes selbst schliessen. Jede der Projectionen wird nämlich durch den Durchschnitt zweier in ihrer Ebene den Axen parallel geführter Linien gefunden, deren perpendiculäre Entfernung von den Axen der Länge der sich auf die beiden andern Ebenen beziehenden Coordinaten des Punktes gleich ist. Um sich hiervon zu überzeugen, denke man sich durch den Punkt im Raume drei den coordinirten Ebenen parallele Ebenen. Die gegenseitigen Durchschnitte je zweier dieser Ebenen mit einander werden, von dem Punkte aus gerechnet, die Coordinaten des Punktes bilden, so wie die Durchschnitte zweier derselben mit einer der coordi-

Digitized by Google

nirten Ebenen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte die Projection des Punktes im Raume auf dieser Ebene darstellen; in dem durch diese Durchschnitte in jeder der coordinirten Ebenen mit den Axen gebildeten Rectangel sind nun je zwei und zwei Seiten einander selbst und zweien Coordinaten im Raume, als zwischen Parallellinien eingeschlossenen Parallellinien, gleich. — Hierdurch ist die analytische Geometrie im Stande, durch Zusammenstellung von Gleichungen, welche die Lage der Projectionen gegen die Axen ausdrücken, die Lage eines Punktes im Raume anzugeben. Wir wollen nunmehr sehen, wie wir diesen Zweck durch sinnliche Darstellung erreichen können.

Es ist einleuchtend, dass, wenn die Lage eines Punktes gegen materielle coordinirte Ebenen durch sinnlich wahrnehmbare Projectionen bestimmt werden sollte, die Angabe zweier dieser Projectionen hierzu vollkommen ausreichend wäre, indem der Punkt sich in dem Durchschnitte der aus denselben errichteten Coordinaten befinden muss. Hieraus folgt, dass in diesem Falle auch zwei coordinirte Ebenen hinlänglich sind, und die dritte sich durch die Angabe einer ihrer Axen ersetzen lässt.

Die Projectionslehre, die auf die hier angegebene Weise zu Werke geht, ist daher befugt, nur *zwei* coordinirte Ebenen zu ihren Bestimmungen anzunehmen, die von nun an den Namen *Projectionsebenen* führen. Wegen der grössern Bequemlichkeit zu praktischen Zwecken wird die eine derselben als *horizontal*, die andere folglich als *vertical* angesehen, und jede erhält die ihrer Lage angemessene Benennung. Die Projectionen selbst werden durch die Benennung *horizontale* und *verticale* Projection unterschieden, je nachdem man die in der horizontalen oder die in der verticalen Projectionsebene liegende Projection bezeichnen will, so wie die aus der horizontalen Projection errichtete Ordinate oder Perpendiculäre *die horizontal projicirende Linie*, und die aus der verticalen Projection errichtete Perpendiculäre die *vertical projicirende Linie* genannt wird. Die Linie, nach welcher die Projectionsebenen einander schneiden, heisst die *Projectionsaxe*.

Da es aber zum Behufe von ebenen Constructionen erforderlich ist, dass die Lage eines Punktes bezeichnende Projectionen in *einer* Ebene liegen, so ist man ferner veranlasst, vorauszusetzen, dass die beiden Projectionsebenen zu *einer* Ebene vereinigt sind, indem man annimmt, die verticale Projectionsebene habe sich um die Projectionsaxe so lange wie um eine Angel gedreht, bis sie nach Beschreibung eines Winkels von 90° mit der horizontalen Projectionsebene zusammengefallen sei. Die auf diese Weise gebildete Ebene kann nunmehr zur Ausführung von Constructionen dienen, sobald man sich mit der Lage bekannt gemacht hat, welche die Projectionen in dem *vereinigten* Zustande der Projectionsebenen annehmen, denn alsdann wird man immer im Stande sein, aus derselben auf die Lage des Punktes im Raume gegen die Projectionsebenen in ihrem gegen einander *perpendiculären* Zustande zu schliessen, und umgekehrt, aus Kenntniss der letztern, die Projectionen auf *einer* Ebene richtig anzugeben.

Digitized by Google

Denken wir uns demnach durch die beiden projicirenden Linien eines Punktes im Raume, mithin durch den Punkt selbst und dessen Projectionen, eine Ebene, so wird dieselbe beiden Projectionsebenen zugleich, folglich auch der Projectionsaxe, perpendiculär sein, und die Durchschnitte dieser Ebene mit den Projectionsebenen werden die Projectionsaxe in einem Punkte, in perpendiculärer Richtung, treffen. Auf diesen Durchschnitten befinden sich die Projectionen des Punktes, und zwar ist die Entfernung der verticalen Projection von der Axe der horizontal projicirenden Linie, und die Entfernung der horizontalen Projection von der Axe der vertical projicirenden Linie gleich. Wird nun die verticale Projectionsebene auf die horizontale herabgeschlagen, so geht die Bewegung der verticalen Projection des Punktes offenbar in jener der Axe perpendiculären Ebene vor sich, und die Projection wird mit einem Radius, der ihrem Abstande von der Axe oder der horizontal projicirenden Linie des Punktes gleich ist, aus dem Punkte, in welchem die Axe und die derselben perpendiculäre Ebene sich schneiden, einen Kreisbogen von 90° beschreiben, bis sie in die horizontale Projectionsebene, auf den Durchschnitt derselben mit der der Projectionsaxe perpendiculären Ebene, fällt. Da aber dieser Durchschnitt der Axe perpendiculär ist und durch die horizontale Projection des Punktes geht, so folgt hieraus:

Dass die Projectionen eines Punktes im Raume, wenn die Projectionsebenen vermittelst der oben angegebenen Bewegung eine solche Lage angenommen haben, dass sie nur eine Ebene bilden, auf einer der Projectionsaxe perpendiculären Linie liegen, und dass die perpendiculäre Entfernung der horizontalen Projection von der Axe der vertical projicirenden Linie, so wie die perpendiculäre Entfernung der verticalen Projection von der Projectionsaxe der horizontal projicirenden Linie des Punktes gleich ist.

Es bleibt uns nun noch übrig, eine Bestimmung zu treffen, nach welcher wir bei Ansicht der Projectionen eines Punktes sogleich auf diejenige der vier durch die Projectionsebenen gebildeten Abtheilungen des Raumes, in welcher der Punkt sich befindet, schliessen, und umgekehrt, wenn die Abtheilung gegeben ist, dieselbe richtig durch die Lage der Projectionen bezeichnen können. Diese Bestimmung bezieht sich auf die Richtung der Bewegung der verticalen Projectionsebene. Ziehen wir nämlich in einer vor uns liegenden Ebene, die wir als die horizontale Projectionsebene ansehen, eine gerade Linie in einer solchen Richtung, dass die Ebene hierdurch in einen uns näher und einen uns entfernter liegenden Theil getheilt wird, und betrachten wir jene Linie als den Durchschnitt beider Projectionsebenen, oder die Projectionsaxe, so kann die verticale Projectionsebene, wenn wir uns dieselbe aufgerichtet denken, in Bezug auf die beiden Abtheilungen der horizontalen Projectionsebene eine zweifache Bewegung eingehen, indem sich nämlich der oberhalb der Axe belegene Theil derselben entweder dem uns entfernter, oder dem uns näher liegenden Theile der horizontalen Projectionsebene anschliesst. Je nachdem die eine oder die andere dieser Bewegungen stattgefunden hat, werden auch die in jenen Ebenen befindlichen

Digitized by Google

Projectionen eine verschiedene Lage gegen einander und in Bezug auf die Axe annehmen. Wir setzen nun bei allen folgenden Constructionen voraus: *Dass sich der oberhalb der Projectionsaxe liegende Theil der verticalen Projectionsebene dem uns entfernter, oder jenseit der Projectionsaxe liegenden Theile der horizontalen Projectionsebene angeschlossen habe.* Hieraus ergiebt sich:

Dass, wenn sich die horizontale Projection eines Punktes diesseit, und die verticale Projection jenseit der Projectionsaxe befindet, der Punkt im Raume diesseit der verticalen und oberhalb der horizontalen Projectionsebene sich befindet.

Dass, wenn beide Projectionen diesseit der Axe liegen, der Punkt im Raume diesseit der verticalen und unterhalb der horizontalen Projectionsebene gelegen ist.

Dass, wenn beide Projectionen jenseit der Axe liegen, der Punkt im Raume sich jenseit der verticalen und oberhalb der horizontalen Projectionsebene befindet.

Dass endlich, wenn die horizontale Projection jenseit, und die verticale Projection diesseit der Axe liegt, der Punkt im Raume sich jenseit der verticalen und unterhalb der horizontalen Projectionsebene befindet.

Nach diesen Folgerungen und dem früher Gesagten sind wir nunmehr im Stande, aus den auf einer Ebene gegebenen Projectionen eines Punktes dessen Ort im Raume zu erkennen, und umgekehrt, aus der Kenntniss der directen Entfernungen eines Punktes von drei bekannten einander perpendiculären Ebenen die Lage desselben im Raume durch die richtige Verzeichnung zweier Projectionen auf einer dieser Ebenen anzugeben. Im letztern Falle wird man, unsern Annahmen zufolge, in der horizontalen, oder als solche angesehenen Ebene eine der Projectionsaxe perpendiculäre Linie ziehen, welche den Durchschnitt einer dritten coordinirten Ebene mit der horizontalen Projectionsebene vorstellt, und dieser Linie in der bekannten Entfernung des Punktes von jener dritten Ebene eine Parallellinie führen. Auf dieser Parallellinie liegen nunmehr die beiden Projectionen des Punktes.

Die Bestimmung der Lage einer *geraden Linie* im Raume, in Beziehung auf unsere Projectionsebenen, ergiebt sich unmittelbar aus der Bestimmung von Punkten und ist demnach keiner Schwierigkeit unterworfen. Denken wir uns nämlich aus allen Punkten einer geraden Linie im Raume die projicirenden Linien dieser Punkte, so werden diese Linien zwei Ebenen bilden, von denen die eine der horizontalen Projectionsebene, und die andere der verticalen Projectionsebene perpendiculär ist. Jene wird die *horizontal projicirende Ebene*, diese die *vertical projicirende Ebene* genannt, und von beiden wird jede diejenige Projectionsebene, der sie perpendiculär ist, nach einer geraden Linie schneiden, welche, wie man sieht, der Ort der Projectionen aller Punkte der Linie, oder die Projection der Linie im Raume auf dieser Projectionsebene ist. Die Projectionen zweier Punkte einer geraden Linie bestimmen demnach vollkommen die Richtung der Projectionen der Li-

Digitized by Google

nie; folglich ist eine Gerade im Raume gegeben, wenn man die Lage zweier Punkte derselben gegen die Projectionsebenen, oder die Projectionen dieser Punkte kennt.

Um die Länge eines bestimmten Theiles einer auf diese Weise gegebenen geraden Linie zu finden, ist im Allgemeinen eine Construction erforderlich, die in der Folge angeführt werden wird. In besondern Fällen, wenn nämlich die Linie im Raume einer der Projectionsebenen, oder beiden zugleich parallel ist, kommt die Länge einer oder beider Projectionen der Länge des den Projectionen correspondirenden Theiles der Linie im Raume gleich. In der erstern Lage nämlich ist die Linie ihrer in der parallelen Projectionsebene liegenden Projection parallel und mit derselben zwischen Parallellinien — den projicirenden Linien — eingeschlossen; in der zweiten findet das Nämliche für beide Projectionen zugleich statt. Man sieht zugleich, dass die parallele Lage einer Geraden gegen eine der Projectionsebenen es mit sich bringt, dass die Projection derselben auf der andern Projectionsebene der Projectionsaxe parallel sei, indem alsdann die der erstern Ebene correspondirende projicirende Ebene der zweiten parallel ist, und die Durchschnitte zweier paralleler Ebenen durch eine dritte Ebene einander parallel sind; aus der parallelen Lage einer Geraden gegen beide Projectionsebenen, oder gegen die Projectionsaxe folgt daher auch der Parallelismus beider Projectionen mit der Projectionsaxe.

Es bleibt uns nun noch übrig zu betrachten, wie sich die Lage einer *Ebene* gegen die Projectionsebenen bestimmen lässt. Hierzu gelangt man durch die Bestimmung der Lage gerader Linien gegen jene Ebenen, denn einem bekannten Lehrsatze der Geometrie gemäss, lässt sich durch zwei einander sich schneidende oder einander parallele Linien nur eine Ebene führen. Eine Ebene ist daher gegeben, wenn die Lage zweier solcher Linien gegen die Projectionsebenen gegeben ist.

Ist nun die Lage einer Ebene solchergestalt bestimmt, so lassen sich die Durchschnitte derselben mit den Projectionsebenen construiren, und diese Durchschnitte können alsdann zu einer höchst einfachen Bezeichnung der Ebene angewendet werden, indem, wie man sieht, auf diese Weise hierzu nur zwei in den Projectionsebenen gezogene Linien erforderlich sind. Wir werden uns daher immer dieser Methode bedienen. Um aber die Durchschnitte einer Ebene mit den Projectionsebenen von Durchschnitten anderer Ebenen miteinander zu unterscheiden, wollen wir für jene die französische Benennung *Tracen* beibehalten und zur Unterscheidung der beiden Tracen von einander die eine die *horizontale* Trace, die andere die *verticale* Trace der Ebene nennen, je nachdem von der in der horizontalen, oder von der in der verticalen Projectionsebene gelegenen Trace die Rede ist.

Die Tracen einer der Projectionsaxe nicht parallelen Ebene begegnen sich immer in einem Punkte dieser Axe. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man sich erinnert, dass die Axe beiden Projectionsebenen angehört, folglich der Durchschnittspunkt der Axe mit der gegen die-

Digitized by Google

selbe geneigten Ebene zugleich in der horizontalen und verticalen Trace in einen Punkt der Axe fallen muss. Ist die verticale Projectionsebene herabgeschlagen, und liegen demnach die Tracen in einer Ebene, so hat jener Durchschnittspunkt keine Veränderung erlitten, und die Tracen werden sich immer noch in demselben Punkte der Axe, wie früher, schneiden.

Was die Darstellung der von Ebenen begränzten *Körper* anbetrifft, so reducirt sich dieselbe auf die Darstellung der durch die gegenseitigen Durchschnitte der Seitenflächen jener Körper hervorgebrachten geraden Linien. Ist daher ein Körper gehörig definirt, oder durch eine hinlängliche Anzahl die Oberfläche desselben constituirender Stücke gegeben worden, so kann die Construction jener Linien jedesmal ausgeführt werden, obgleich dieselbe nach Beschaffenheit der Lage des Körpers gegen die Projectionsebenen möglichst einfach oder möglichst complicirt ausfällt. Ueber die vortheilhafteste Lage, wenn solche frei steht, lässt sich aber keine allgemeine Regel geben, denn man sieht, dass die Figur des Körpers und der Zweck der Darstellung hierüber allein entscheiden können. Durch häufige praktische Uebung mit Lineal, Zirkel und Dreieck in Auflösung der folgenden und denselben ähnlicher Aufgaben wird man indessen bald dahin gelangen, in allen vorkommenden Fällen jedesmal den einfachsten und zweckmässigsten Weg zu erkennen.

Nachdem wir uns nunmehr mit der Methode der Bestimmung von Punkten, geraden Linien und Ebenen in Bezug auf zwei Projectionsebenen und mit der Reducirung derselben auf eine Ebene bekannt gemacht haben, können wir zur Auflösung von Aufgaben, zu denen Punkte, Linien und Ebenen, im Raume betrachtet, Veranlassung geben, übergehen. Vorher ist aber zum bessern Verständnisse der Figuren noch Folgendes zu bemerken.

Die Projectionsaxe ist jedesmal durch eine starke Horizontallinie angegeben. Der oberhalb liegende Theil des Papieres stellt den obern und herabgeschlagenen Theil der verticalen Projectionsebene, der unterhalb der Axe liegende Theil des Papieres aber den diesseit der verticalen Projectionsebene liegenden Theil der horizontalen Projectionsebene vor.

Die Projectionen aller gegebenen diesseit der verticalen und oberhalb der horizontalen Projectionsebene liegenden Theile von geraden Linien, so wie die oberhalb der Axe in der verticalen Projectionsebene und diesseit der Axe in der horizontalen Projectionsebene liegenden Tracen gegebener Ebenen sind durch ausgezogene Linien dargestellt. Sind diese Linien aber ausserhalb der hier angegebenen Gränzen verlängert, so ist der verlängerte Theil durch eine punktirte Linie bezeichnet. Die Projectionen von Hülfslinien und die Tracen von Hülfsebenen sind durch unterbrochene, das Resultat der Constructionen hingegen durch ausgezogene Linien angegeben.

Hinsichtlich der besondern Unterscheidungszeichen sind die Projectionen eines Punktes mit zwei gleichnamigen Buchstaben, von denen der eine accentuirt ist, belegt, und ein im Raume gelegener Punkt wird nach seinen Projectionen z. B. der Punkt a a′ benannt. Eben so wird eine gerade Linie durch die zu den Projectionen zweier Punkte derselben gehörigen Buchstaben bezeich-

Digitized by Google

net, z. B. die Linie ab, a′b′. Eine Ebene ist durch zwei gleichlautende, den Tracen in den Projectionsebenen, und einen dritten, dem Durchschnittspunkte der Tracen mit der Projectionsaxe angehörenden, grossen Buchstaben von andern Ebenen oder geraden Linien unterschieden. Der eine jener gleichlautenden Buchstaben wird zur Vermeidung von Verwechselungen accentuirt.

I. Aufgabe.

Die Projectionen einer Linie zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Tab. I. Fig. 1. Es seien a und b die horizontalen Projectionen, a′ und b′ die verticalen Projectionen der gegebenen Punkte; A B sei die Projectionsaxe.

Durch die horizontalen Projectionen a und b zieht man eine gerade Linie, desgleichen durch die verticalen Projectionen a′ und b′. Jene ist die horizontale, diese die verticale Projection der durch die gegebenen Punkte gehenden Linie im Raume.

Denkt man sich durch die Punkte und die horizontal projicirenden Linien derselben eine Ebene, desgleichen eine zweite Ebene durch die Punkte und die beiden vertical projicirenden Linien, so müssen sich diese Ebenen in einer durch beide Punkte gehenden Geraden schneiden, deren projicirende Ebenen sie bilden. Die horizontale Trace der horizontal projicirenden Ebene ist der Ort der horizontalen Projectionen aller Punkte der Linie, oder die horizontale Projection derselben, und ergibt sich demnach, wenn man durch zwei bekannte horizontale Projectionen von zwei der Linie angehörigen Punkten eine gerade Linie führt. Eben so ist die verticale Trace der vertical projicirenden Ebene der Ort der verticalen Projectionen aller Punkte der Linie im Raume und muss durch die bekannten verticalen Projectionen zweier Punkte derselben gehen.

II. Aufgabe.

Aus den gegebenen Projectionen einer Linie die Länge eines von zwei bestimmten Punkten eingeschlossenen Theiles derselben zu finden.

Tab. I. Fig. 2. Es sei A B die Projectionsaxe; a b die horizontale und a′ b′ die verticale Projection eines von zwei bestimmten Punkten a a′ und b b′ begränzten Theiles einer Linie.

In einem der Punkte a′ oder b′, z. B. in a′, errichtet man der Linie a′ b′ eine Perpendiculäre und trägt auf dieselbe die Linie a e′ gleich dem Unterschiede der perpendiculären Entfernungen der Punkte a und b von der Projectionsaxe. Zieht man hierauf die Hypotenuse a′ e′, so ist die Länge derselben der Länge des zwischen den Punkten a a′ und b b′ eingeschlossenen Theiles der Linie gleich.

Digitized by Google

Umgekehrt kann man auch in einem der Punkte a oder b, z. B. in b, der Linie a b eine Perpendiculäre errichten, auf dieselbe die Linie a e gleich dem Unterschiede der Entfernungen der Punkte a′ und b′ von der Projectionsaxe tragen und die Hypotenuse a e ziehen, die ebenfalls der Linie im Raume gleich ist, folglich auch mit a′ c′ von gleicher Länge gefunden werden muss.

Wenn man aus demjenigen Endpunkte der gegebenen Linie, welcher der verticalen Projectionsebene am nächsten liegt, sich dieser Projectionsebene durch die vertical projicirende Linie des andern Endpunktes eine parallel geführte Linie denkt, so entsteht im Raume ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete der verticalen Projection der gegebenen Linie parallel und gleich ist, dessen andere Kathete aber von dem Längenunterschiede der vertical projicirenden Linien der Endpunkte, und dessen Hypotenuse von der gegebenen Linie im Raume gebildet wird. Nun ist, wie wir schon früher gesehen haben, der perpendiculäre Abstand der horizontalen Projection eines Punktes von der Projectionsaxe der vertical projicirenden Linie dieses Punktes gleich, folglich auch der Längenunterschied der Entfernungen der horizontalen Projectionen zweier Punkte von der Projectionsaxe dem Längenunterschiede der vertical projicirenden Linien dieser Punkte. Wir haben also, vermittelst der oben ausgeführten Construction, ein jenem Dreiecke im Raume vollkommen gleiches und ähnliches Dreieck gebildet, woraus die gleiche Länge der beiden Hypotenusen folgt. Aus demselben Grunde ergiebt sich die Richtigkeit des zweiten Verfahrens.

III. Aufgabe.

Die Durchschnittspunkte einer gegebenen Linie mit den Projectionsebenen zu finden.

Es sei A B die Projectionsaxe; a b die horizontale, a′ b′ die verticale Projection der gegebenen Linie.

Um den Durchschnittspunkt der gegebenen Linie mit der horizontalen Projectionsebene zu finden, verlängert man die verticale Projection a′ b′, bis sie die Projectionsaxe trifft, welches in d′ geschieht. Aus dem Punkte d′ errichtet man eine der Axe senkrechte Linie, deren Durchschnittspunkt mit der gleichfalls verlängerten horizontalen Projection a b den gesuchten Durchschnittspunkt abgiebt und in unsrer Figur in d stattfindet. Eben so errichtet man aus dem Punkte, in welchem die verlängerte horizontale Projection die Axe schneidet, eine Perpendiculäre, um durch den Durchschnittspunkt derselben mit der verticalen Projection den Durchschnittspunkt der gegebenen Linie mit der verticalen Projectionsebene zu bestimmen. Tab. I. Fig. 3.

Jeder in der horizontalen Projectionsebene liegende Punkt kann als seine horizontale Projection angesehen und vertical auf die Projectionsaxe projicirt werden. Gehört nun ein solcher Punkt, wie in unserm Falle, einer gegebenen Linie an, so muss sich derselbe

Digitized by Google

auf der horizontalen Projection der Linie befinden, und dessen verticale Projection muss zugleich auf der verticalen Projection der Linie und der Projectionsaxe oder in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beider Linien liegen. Ferner ist es erforderlich, dass die beiden Projectionen des Punktes auf einer der Projectionsaxe senkrechten Linie liegen. Alle diese Bedingungen werden durch die Lage des Punktes d erfüllt, der folglich der gesuchte Durchschnittspunkt der gegebenen Linie a b, a′ b′ mit der horizontalen Projectionsebene ist. Auf gleiche Weise wird die Richtigkeit des Verfahrens zur Bestimmung des Durchschnittspunktes c′ mit der verticalen Projectionsebene bewiesen.

IV. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Linie eine parallele Linie zu führen.

Tab. I. Fig. 4. Es sei A B die Projectionsaxe; a b die horizontale, a′ b′ die verticale Projection der gegebenen Linie; e die horizontale, e′ die verticale Projection des gegebenen Punktes.

Durch die Punkte e und e′ zieht man den Linien a b und a′ b′ die parallelen Linien e d, e′ d′. Diese sind die Projectionen der gesuchten Linie im Raume.

Die beiden horizontal projicirenden Ebenen zweier paralleler Linien im Raume sind einander parallel, folglich sind es auch die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der horizontalen Projectionsebene, oder die horizontalen Projectionen der Linien. Eben so folgt aus dem Parallelismus der vertical projicirenden Ebenen der Parallelismus der verticalen Projectionen paralleler Linien. *Es sind daher die correspondirenden Projectionen paralleler Linien im Raume einander parallel.*

V. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Ebene eine senkrechte Linie zu fällen.

Es sei A B die Projectionsaxe; C A C′ die gegebene Ebene; d d′ der gegebene Punkt.

Tab. I. Fig. 5. Aus der horizontalen Projection d des gegebenen Punktes fällt man auf die horizontale Trace A C der gegebenen Ebene eine Perpendiculäre d e, so wie aus der verticalen Projection d′ auf die verticale Trace A C′ die senkrechte Linie d′ e′ errichtet wird. Diese Linien sind die Projectionen der gesuchten Linie im Raume.

Wenn eine Linie einer Ebene perpendiculär ist, so ist die horizontal projicirende Ebene dieser Linie zugleich jener Ebene und der horizontalen Projectionsebene, folglich der Durchschnittslinie beider oder der horizontalen Trace perpendiculär, woraus sich die perpendiculäre Richtung der horizontalen Projection dieser Linie auf jene Trace ergiebt.

Digitized by Google

Man sieht nun, warum zugleich die verticale Projection der Linie der verticalen Trace der Ebene perpendicular sein muss. *Wenn also eine Linie und eine Ebene einander perpendicular sind, so sind die Projectionen der Linie den in den correspondirenden Projectionsebenen gelegenen Tracen der Ebene perpendicular.*

VI. Aufgabe.

Einer gegebenen Ebene durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu führen.

Es sei AB die Projectionsaxe; DCD′ die gegebene Ebene; aa′ der gegebene Punkt.

Durch den Punkt aa′ führt man einer der Tracen der gegebenen Ebene, z. B. der verticalen Trace CD′, eine parallele Linie, deren verticale Projection a′b′ der Trace selbst, und deren horizontale Projection ab der Projectionsaxe parallel sein wird. Man construirt den Durchschnittspunkt dieser Linie mit der horizontalen Projectionsebene, den man in b findet (Aufg. III.). Aus diesem Punkte zieht man der horizontalen Trace CD der gegebenen Ebene eine parallele Linie EB, welche die horizontale Trace der verlangten Ebene abgiebt. Die verticale Trace derselben wird gefunden, indem man aus dem Punkte B, in welchem die horizontale Trace die Projectionsaxe schneidet, der verticalen Trace der gegebenen Ebene die parallele Linie BE′ zieht, oder auch, indem man durch den Punkt aa′ der horizontalen Trace der gegebenen Ebene eine Parallele führt, den Durchschnittspunkt derselben mit der verticalen Projectionsebene construirt und nun durch diesen Punkt der verticalen Trace jener Ebene eine parallele Linie zieht, welche die Projectionsaxe in dem Punkte B schneiden muss, wenn richtig operirt worden ist. Tab. I. Fig. 6.

Die durch den Punkt aa′ der verticalen Trace CD′ parallel geführte Linie ist hierdurch der gegebenen Ebene parallel und folglich schon in der zu findenden Ebene enthalten. Der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der horizontalen Projectionsebene gehört aus diesem Grunde der horizontalen Trace EB der gesuchten Ebene an. Nun sind ferner die Durchschnitte zweier paralleler Ebenen durch eine dritte Ebene einander parallele Linien, folglich sind *die correspondirenden oder in einer Projectionsebene liegenden Tracen paralleler Ebenen einander parallel.*

VII. Aufgabe.

Wenn zwei Ebenen gegeben sind, den diesen Ebenen gemeinschaftlichen Durchschnitt zu construiren.

Es sei AC die horizontale, AC′ die verticale Trace der einen Ebene; BD die horizontale, BD′ die verticale Trace der andern Ebene; AB die Projectionsaxe. Tab. I. Fig. 7.

Digitized by Google

Aus dem Punkte a′, in welchem sich die verticalen Tracen beider Ebenen schneiden, fällt man eine Perpendiculäre auf die Projectionsaxe in a′; desgleichen aus dem Punkte b, in welchem die horizontalen Tracen sich schneiden, in b′. Zieht man nun die Linien a b und a′ b′, so ist a b die horizontale, und a′ b′ die verticale Projection des gesuchten Durchschnitts.

Der Punkt a′ ist beiden verticalen Tracen der gegebenen Ebenen gemeinschaftlich und gehört daher beiden Ebenen oder dem gesuchten Durchschnitte an. Ferner kann dieser Punkt selbst als seine verticale Projection angesehen und horizontal in a projicirt werden. Aus einem ähnlichen Grunde schliesst man, dass b die horizontale, und b′ die verticale Projection eines zweiten Punktes des Durchschnitts sei, dessen Projectionen a b und a′ b′ sich demnach aus den bekannten Projectionen a a′, b b′ ergeben müssen.

Es können bei dieser Aufgabe einige besondere Fälle vorkommen, welche betrachtet zu werden verdienen.

Tab. I. Fig. 8. 1. Wenn zwei gegebene Ebenen, wie z. B. DCD′ und FEF′ eine solche Lage haben, dass sich die Tracen derselben nicht zu schneiden scheinen.

In diesem Falle werden sich die horizontalen Tracen in dem jenseit der verticalen Projectionsebene belegenen Theile der horizontalen Projectionsebene schneiden. Man muss daher diese Tracen oberhalb der Projectionsaxe verlängern, bis man den Durchschnittspunkt c findet, der vertical in c′ projicirt wird. Ebenso begegnen sich die verticalen Tracen D′ C, F′ E in dem unterhalb der horizontalen Projectionsebene gelegenen Theile der verticalen Projectionsebene und müssen daher unterhalb der Projectionsaxe verlängert werden, bis sie sich in einem Punkte a′ schneiden, der horizontal in a projicirt wird. Von nun an verfährt man wie gewöhnlich, indem man die gleichnamigen oder in einer Projectionsebene gelegenen Projectionen durch gerade Linien a b, a′ b′ verbindet, welches die Projectionen des gesuchten Durchschnitts sein werden.

Tab. II. Fig. 9. 2. Wenn zwei correspondirende oder in einer Projectionsebene gelegene Tracen zweier gegebener Ebenen einander parallel sind.

Es sei A C′ die horizontale, A C die verticale Trace der einen Ebene; B D′ die horizontale, B D die verticale Trace der andern Ebene; A B die Projectionsaxe. A C′ und B D′ sind einander parallel.

Aus dem Punkte e′, in welchem sich die verticalen Tracen A C und B D schneiden, errichtet man der Projectionsaxe eine Perpendiculäre in e und zieht aus den Punkten e und e′ die den horizontalen Tracen und der Projectionsaxe parallelen Linien e f und e′ f′. Jene ist die horizontale, diese die verticale Projection des gesuchten Durchschnitts.

Die parallele Lage der Tracen zweier Ebenen in einer Projectionsebene erfordert den Parallelismus des gegenseitigen Durchschnitts dieser Ebenen mit jener Projectionsebene; denn umgekehrt müsste, wenn der Durchschnitt zweier Ebenen einer der Projectionsebenen

Digitized by Google

parallel wäre, derselbe bei den in jener Projectionsebene gelegenen Tracen zu gleicher Zeit parallel sein, woraus der Parallelismus der Tracen selbst folgen würde. Es ist demnach durch den Punkt e′, welcher, wie man weiss, dem gesuchten Durchschnitte angehört, den horizontalen Tracen, folglich auch der horizontalen Projectionsebene, eine parallele Linie geführt worden (Aufg. IV.), indem diese Tracen selbst als horizontale Projectionen von Linien anzusehen sind, deren verticale Projectionen in die Projectionsaxe fallen.

3. Wenn endlich die Tracen zweier gegebenen Ebenen insgesammt der Projectionsaxe parallel sind.

Dieser Fall wird eintreten, sobald beide Ebenen der Projectionsaxe parallel sind, wie leicht einzusehen ist. Alsdann wird aber der Durchschnitt dieser Ebenen gleichfalls der Projectionsaxe parallel sein, denn sonst müsste derselbe zwei parallele Tracen in einem gemeinschaftlichen Punkte treffen, welches unmöglich ist. Um daher diesen Durchschnitt zu finden, ist es hinlänglich, einen Punkt desselben zu kennen, wozu man durch folgende Construction gelangt. Tab. II. Fig. 10.

Es sei AB die Projectionsaxe; CD die horizontale, C′ D′ die verticale Trace der einen Ebene; EF die horizontale, E′ F′ die verticale Trace der andern Ebene.

Durch einen beliebigen Punkt der Projectionsaxe errichtet man derselben eine Perpendiculäre HG, welche die horizontalen Tracen in den Punkten a, b, und die verticalen Tracen in den Punkten g, m schneidet. Nunmehr trägt man die Entfernungen ca von c nach e, cb von c nach d und zieht die Linien me und gd. Ferner errichtet man aus dem Punkte h, in welchem diese Linien sich schneiden, der Projectionsaxe die Perpendiculäre hi und trägt die Länge derselben von c nach f′, so wie die Entfernung ic von c nach f. Die auf solche Weise bestimmten Punkte f′ und f sind die Projectionen eines Punktes des gesuchten Durchschnitts.

Man sieht, dass diese Construction die Darstellung der Seitenansicht der Durchschnitte der gegebenen Ebenen mit einer diesen Ebenen und der Projectionsaxe perpendiculären Ebene HcG bezweckt, indem hierdurch der Durchschnittspunkt dieser Durchschnitte, folglich ein beiden Ebenen gemeinschaftlicher Punkt, sichtbar wird. Es ist nämlich vorausgesetzt worden, die Ebene HcG habe sich mit den in ihr enthaltenen Durchschnitten so lange um ihre verticale Trace Hc gedreht, bis sie mit der verticalen Projectionsebene zusammengefallen sei. Während dieser Bewegung beschreiben die den Durchschnitten in der horizontalen Projectionsebene angehörigen Punkte a und b Kreisbogen von 90°, bis sie in die Punkte d und e gelangen, während die jenen Durchschnitten in der verticalen Projectionsebene angehörigen Punkte m und g unbeweglich bleiben. Die Linien gd und ke stellen nunmehr diese Durchschnitte in ihrer perpendiculären Seitenansicht vor und geben in ihrem Durchschnittspunkte h einen Punkt des gesuchten Durchschnitts der gege-

Digitized by Google

benen Ebenen. Wird dieser Punkt wieder in seine frühere Lage gebracht, so sind die Punkte f und f′ die Projectionen desselben, denn c f ist der Länge der vertical projicirenden, und c f′ der Länge der horizontal projicirenden Linie gleich gemacht worden.

VIII. Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, die Tracen der diese Linien enthaltenden Ebene zu finden.

Es sei A B die Projectionsaxe; a b die horizontale, a′ b′ die verticale Projection der einen Linie; d c die horizontale, d′ c′ die verticale Projection der andern Linie; e e′ der Durchschnittspunkt beider Linien.

Tab. II. Fig. 12.

Man construirt die Durchschnittspunkte c, b, und d′, a′, der gegebenen Linien mit den Projectionsebenen (Aufg. III.). Durch diese Punkte zieht man die Linien C B und C′ B. Diese Linien sind die gesuchten Tracen.

Da durch zwei einander schneidende Linien nur eine Ebene gelegt werden kann, so gehören die Durchschnittspunkte solcher Ebenen mit den Projectionsebenen den Tracen jener Ebene an.

IX. Aufgabe.

Die Projectionen eines Punktes zu finden, der in einer gegebenen Ebene enthalten sein soll.

Damit ein Punkt in einer gegebenen Ebene enthalten sein kann, so muss derselbe im Allgemeinen sich auf einer Linie befinden, deren Durchschnittspunkte mit den Projectionsebenen in die Tracen dieser Ebene fallen. Zufolge der vorhergehenden Aufgabe ist eine solche Linie leicht zu construiren, und man sieht, dass eine Projection derselben, mithin auch eine Projection des Punktes, willkürlich angenommen werden darf. Indessen kann man durch folgende, noch einfachere Construction sich gleichfalls eine in einer gegebenen Ebene enthaltene Linie geben, wodurch die Aufgabe als gelöst betrachtet werden muss.

Tab. II. Fig. 11.

Es sei A B die Projectionsaxe; C A C′ die gegebene Ebene.

Man zieht einer der Tracen, z. B. der horizontalen Trace A C, eine parallele Linie f g und errichtet aus dem Punkte f, in welchem die Projectionsaxe durch diese Linie getroffen wird, eine Perpendiculäre. Ferner zieht man aus dem Punkte f′, in welchem diese Perpendiculäre die andere, diesesmal die verticale Trace A C′, schneidet, der Projectionsaxe die parallele Linie f′ g′. Die Linien f g, f′ g′ sind die Projectionen der gesuchten Linie, woraus folgt, dass jeder auf derselben angenommene Punkt, wie z. B. a a′, eine der Anforderung der Aufgabe entsprechende Lage hat. Die Linie f g, f′ g′ ist einer in der Ebene C A C′ enthaltenen Linie, nämlich der Trace A C, parallel

Digitized by Google

geführt werden und trifft diese Ebene in einem Punkte, in f′, muss daher ganz in derselben liegen. Man kann auch die Linien f g, f′ g′ als die Projectionen des Durchschnitts der gegebenen Ebene mit einer der horizontalen Projectionsebene parallel geführten Ebene ansehen.

X. Aufgabe.

Eine gegebene Ebene mit einem in derselben gegebenen Punkte auf eine der Projectionsebenen herabzuschlagen.

Es ist oft bei Constructionen, wie wir in der Folge sehen werden, sehr nützlich, von der Lage eines oder mehrerer in einer bekannten Ebene enthaltenen Punkte gegen eine in dieser Ebene gleichfalls enthaltene gerade Linie durch blosse Ansicht unmittelbar urtheilen zu können. Dieses wird möglich, wenn man annimmt, die Ebene habe sich um eine ihrer Tracen so lange wie um eine Axe gedreht, bis sie mit der diese Trace enthaltenden Projectionsebene zusammengefallen sei. Alsdann ist nämlich die Lage jedes in der Ebene enthaltenen Punktes gegen die als Axe dienende Trace unveränderlich geblieben und in der Projectionsebene selbst sichtbar geworden. Die hierzu erforderliche Operation heisst, eine Ebene auf eine der Projectionsebenen *herabschlagen* (rabattre) und kann auf folgende Art ausgeführt werden.

Es sei C A C′ eine gegebene Ebene; a a′ ein in derselben enthaltener Punkt. Tab. II. Fig. 11.

Aus dem Punkte a zieht man der horizontalen Trace eine senkrechte Linie a d, welche diese Trace in c schneidet, und trägt die perpendiculäre Entfernung des Punktes a′ von der Projectionsaxe von a nach e, in einer mit der Linie A C parallelen Richtung. Alsdann zieht man c e und trägt die Länge dieser Linie von c nach d, wodurch man in d den Punkt findet, welchen der Punkt a a′ in der horizontalen Projectionsebene einnimmt, wenn sich die Ebene C A C′ mit derselben vereinigt hat.

Die Bewegung des Punktes a a′ geht in einer der als Axe dienenden Trace perpendiculären Ebene vor sich, auf deren horizontaler Trace a d sich folglich die horizontale Projection a, und nach vollendeter Bewegung der Punkt a a′ selbst befinden muss. Ferner beschreibt a a′ einen Kreisbogen, dessen Centrum in dem Durchschnittspunkte der Tracen A C und a d liegt, und dessen Radius der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks gleich ist, welches im primitiven Zustande der Ebene durch die horizontal projicirende Linie, durch den perpendiculären Abstand der horizontalen Projection a von der horizontalen Trace A C und endlich durch die perpendiculäre Entfernung des Punktes a a′ von dieser Trace gebildet wird. Dieses Dreieck c a e ist construirt, und die hieraus gefundene Länge des Radius von c nach d getragen worden.

Da diese Construction für eine beliebige Anzahl von in einer gegebenen Ebene enthaltenen

Digitized by Google

Punkten angewendet werden kann, so lassen sich auch hierdurch solche Punkte verbindende Linien in ihrer wahren Lage gegen eine der Tracen, oder gegen einander selbst, darstellen, wodurch man auf eine leichte Art die Winkel findet, welche in einer Ebene befindliche Linien mit einander bilden.

XI. Aufgabe.

Durch eine gegebene Linie eine Ebene einer zweiten gegebenen Linie parallel zu führen.

Durch einen willkürlich auf der ersten Linie angenommenen Punkt zieht man der zweiten Linie eine Parallele (Aufg. IV.) und legt durch diese Parallele und die erste Linie eine Ebene (Aufg. VIII). Diese Ebene wird der zweiten Linie parallel sein.

Eine Ebene und eine Linie sind einander parallel, wenn die Linie irgend einer in der Ebene enthaltenen Linie parallel ist.

XII. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zweien gegebenen Linien parallel zu führen.

Durch den gegebenen Punkt führt man zwei Linien, von denen jede einer der gegebenen Linien parallel ist (Aufg. IV.) und legt durch den Punkt und jene Linien eine Ebene, welche die erforderliche Lage haben wird. (Aufg. VIII.)

Der Beweis dieses Verfahrens ist in der vorhergehenden Aufgabe begriffen.

XIII. Aufgabe.

Den Durchschnittspunkt einer gegebenen Linie mit einer gegebenen Ebene zu construiren.

Man legt durch die gegebene Linie eine Ebene und sucht den Durchschnitt derselben mit der gegebenen Ebene (Aufg. VII). Der Punkt, in welchem die gefundene Durchschnittslinie die gegebene Linie schneidet, ist der verlangte Durchschnittspunkt der gegebenen Ebene mit der gegebenen Linie.

Die Durchschnittslinie ist der gegebenen Ebene und der Hülfsebene gemeinschaftlich, und da letztere die gegebene Linie enthält, so muss dieselbe die gegebene Ebene in einem Punkte jener Durchschnittslinie treffen.

Die hier angegebene Construction wird am einfachsten ausfallen, wenn man unter der unendlichen Menge der Ebenen, welche man durch die gegebene Linie führen kann, eine der projicirenden Ebenen dieser Linie wählt. Die eine der Tracen einer solchen Ebene ist nämlich schon durch

Digitized by Google

eine der Projectionen der Linie dargestellt, und die andere Trace ist der Projectionsaxe perpendiculär. Man braucht daher in diesem Falle auch nur eine der Projectionen des Durchschnitts zu construiren, indem die andere Projection mit einer der Projectionen der gegebenen Linie zusammenfällt.

XIV. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Linie eine perpendiculäre Ebene zu führen.

Aus einem beliebigen Punkte der Projectionsaxe errichtet man auf die Projectionen der gegebenen Linie perpendiculäre Linien. Diese Linien bilden die Tracen einer der gegebenen Linie perpendiculären Ebene (Aufg. V.), und eine durch den gegebenen Punkt dieser Ebene parallel geführte Ebene (Aufg. VI.) hat die in der Aufgabe erforderte Lage.

Diese Ebene enthält den gegebenen Punkt und ist einer der gegebenen Linie perpendiculären Ebene parallel, folglich selbst der gegebenen Linie perpendiculär.

XV. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Linie eine Perpendiculäre zu errichten.

Man legt durch den gegebenen Punkt eine der gegebenen Linie perpendiculäre Ebene (Aufg. XIV.), construirt den Durchschnittspunkt der Linie und der Ebene mit einander (Aufg. XIII.) und verbindet diesen Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine gerade Linie. Diese Linie ist die verlangte Perpendiculäre.

Sie liegt nämlich in einer der gegebenen Linie perpendiculären Ebene und geht durch den gegebenen Punkt und einen Punkt jener Linie.

XVI. Aufgabe.

Durch eine gegebene Linie eine einer gegebenen Ebene perpendiculäre Ebene zu legen.

Aus einem Punkte der gegebenen Linie fällt man auf die gegebene Ebene eine Perpendiculäre (Aufg. V.) und lässt durch diese Perpendiculäre und die gegebene Linie eine Ebene gehen. Diese Ebene wird die verlangte Eigenschaft besitzen.

Zwei Ebenen sind einander perpendiculär, wenn eine derselben durch eine der andern perpendiculäre Linie geht.

Digitized by Google

XVII. Aufgabe.

Den Winkel zu construiren, den eine gegebene Ebene mit einer gegebenen Linie bildet.

Durch die gegebene Linie führt man der gegebenen Ebene eine perpendiculäre Ebene (Aufg. XVI.) und construirt den Durchschnitt dieser beiden Ebenen (Aufg VII.). Dieser Durchschnitt und die gegebene Linie bilden den verlangten Winkel, von dessen wahrer Grösse man urtheilen kann, wenn man die Hülfsebene mit dem Scheitelpunkte desselben und zweien Punkten, von denen jeder auf einem der Schenkel angenommen ist, auf eine der Projectionsebenen herabschlägt.

Der Winkel, den eine Linie und eine Ebene mit einander bilden, wird in einer durch diese Linie gehenden und der Ebene perpendiculären Ebene gemessen.

XVIII. Aufgabe.

Den Winkel zu construiren, den zwei gegebene Ebenen mit einander bilden.

Man construirt den Durchschnitt beider gegebenenen Ebenen (Aufg. VII.) und führt durch einen Punkt dieses Durchschnitts demselben eine perpendiculäre Ebene (Aufg. XIV.). Ferner construirt man die Durchschnitte dieser Ebene mit beiden gegebenen Ebenen und den Winkel, den diese Durchschnitte mit einander bilden (Aufg. X.). Dieses ist der gesuchte Winkel.

Der Winkel, den zwei Ebenen mit einander bilden, wird in einer beiden Ebenen, oder dem gemeinschaftlichen Durchschnitte derselben perpendiculären Ebene gemessen.

XIX. Aufgabe.

Die Projectionen eines gegebenen Winkels zu bestimmen, wenn die Winkel bekannt sind, unter welchen die Schenkel desselben gegen die horizontale Projectionsebene geneigt sind, und die Neigung der Ebene des Winkels gegen die horizontale Projectionsebene zu finden.

Diese Aufgabe wird auf die einfachste Weise gelöst werden können, wenn man einen Schenkel des gegebenen Winkels als in der verticalen Projectionsebene gelegen annimmt, indem alsdann die horizontale Projection desselben in die Projectionsaxe fällt, und nur noch die Projectionen des andern Schenkels zu construiren übrig bleiben.

Tab. II. Fig. 13. Es sei AB die Projectionsaxe; C′ der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels; C die horizontale Projection dieses Scheitelpunkts; EC′ der in der verticalen Projectionsebene gelegene Schenkel; C′EC der Winkel, den derselbe mit der horizontalen Projectionsebene bildet, und EC die horizontale Projection dieses Schenkels. Ferner sei C′DC der Winkel, den der andere Schenkel mit

Digitized by Google

der horizontalen Projection bildet, und endlich EC′F der von beiden Schenkeln eingeschlossene Winkel.

Aus dem Punkte C, als Mittelpunkt, zieht man mit einem Radius gleich CD einen Kreisbogen, trägt die Länge der Linie C′D von C′ nach F, beschreibt mit einem Radius gleich EF aus E einen zweiten Kreisbogen und zieht durch den Punkt G, in welchem sich beide Kreisbogen schneiden, die Linie GC. Diese Linie ist die horizontale Projection des ausserhalb der verticalen Projectionsebene gelegenen Schenkels, dessen verticale Projection C′G′ sich ergiebt, wenn der Punkt G vertical in G′ projicirt wird. Die gesuchten Projectionen des gegebenen Winkels sind nunmehr die Winkel ECG und EC′G′.

Es kömmt darauf an, den Durchschnittspunkt des ausserhalb der verticalen Projectionsebene gelegenen Schenkels mit der horizontalen Projectionsebene zu finden. Da dieser Durchschnittspunkt auf der Projectionsaxe in D liegt, wenn man annimmt, die verticale Ebene jenes Schenkels habe sich um ihre verticale Trace CC′ gedreht und mit der verticalen Projectionsebene vereinigt, so sieht man, dass die horizontale Entfernung CD des Durchschnittspunktes von der verticalen Trace der Ebene des Schenkels für jeden Winkel, den diese Ebene mit der verticalen Projectionsebene macht, unverändert bleibt. Es muss daher der gesuchte Durchschnittspunkt auf einem mit dem Radius CD aus C beschriebenen Kreisbogen liegen und sich in G ergeben, wenn zur vollkommenen Bestimmung desselben seine in der Ebene der Schenkel construirte Entfernung EF von dem bekannten Durchschnittspunkte E des Schenkels CE mit der horizontalen Projectionsebene in diese letztere übertragen wird.

Um die Neigung der Ebene des Winkels, dessen Projectionen construirt worden sind, gegen die Horizontalebene zu finden, wird man die Tracen HE, EH′ construiren, alsdann dieser Ebene eine perpendiculäre Ebene MIK führen, welche zugleich der Horizontalebene perpendiculär sei, und zuletzt den Durchschnitt der Ebenen HEH′ und MIK construiren. Dieser Durchschnitt MI, M′K bildet mit der horizontalen Trace MI der Ebene MIK den Winkel, unter welchem die Ebene HEH′ gegen die horizontale Projectionsebene geneigt ist, und derselbe wird gleich dem Winkel IMO gefunden, wenn die Ebene MIK auf die horizontale Projectionsebene herabgeschlagen wird (Aufg. X.).

Es ist beiläufig zu erwähnen, dass diese Aufgabe eine unmittelbare Anwendung finden kann, wenn man einen beobachteten Winkel, dessen Schenkel nicht in einer horizontalen Ebene liegen, zu Papier bringen will, indem derselbe alsdann in seiner horizontalen Projection erscheint. Die Construction der Ebene dieses Winkels würde das Niveau dieser Ebene bestimmen.

Digitized by Google

XX. Aufgabe.

Wenn eine Ebene und eine in derselben enthaltene Linie gegeben ist, durch diese Linie eine Ebene zu führen, welche mit der gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bilde.

Denkt man sich diese Aufgabe als gelöst, oder die gesuchte Ebene in der verlangten Lage, so wird die gegebene Linie den Durchschnitt beider Ebenen abgeben, und jede dieser Linie perpendiculär geführte Ebene wird jene Ebenen nach zwei Linien schneiden, deren eingeschlossener Winkel der Winkel ist, unter welchem die Ebenen gegen einander geneigt sind. Wenn man daher durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Linie derselben eine perpendiculäre Ebene führt, den Durchschnitt dieser Ebene mit der gegebenen Ebene construirt, aus dem Durchschnittspunkte der gegebenen Linie mit der perpendiculären Ebene in dieser letztern eine Linie führt, welche mit dem gefundenen Durchschnitte den gegebenen Winkel macht, und durch diese sowohl, als durch die gegebene Linie eine Ebene legt, so wird diese Ebene die erforderliche Lage haben.

Tab. III. Fig. 14. Es sei AB die Projectionsaxe; CHC′ die gegebene Ebene; a b, a′ b′ die in derselben enthaltene Linie.

Durch einen willkürlich auf der gegebenen Linie angenommenen Punkt, c c′, ist derselben perpendiculär die Ebene EDE′ geführt (Aufg. XIV.), und der Durchschnitt e i e′ i′ dieser Ebene mit der Ebene CHC′ construirt worden. Um ferner in der Ebene EDE′ eine Linie ziehen zu können, welche den gegebenen Winkel mit jenem Durchschnitte aus c c′ bilde, ist diese Ebene mit dem Durchschnitte auf die horizontale Projectionsebene herabgeschlagen (Aufg. X.), wodurch derselbe die Lage der Linie i c″ einnimmt, indem der Punkt i unveränderlich bleibt, und der Punkt c c′ in c″ fällt. Die jetzt unter dem gegebenen Winkel f c″ i mit i c″ durch c″ gezogene Linie f o wird, wenn die Ebene CDC′ wieder ihre frühere Lage einnimmt, horizontal in g o projicirt, da der Punkt o, in welchem f o jenseit der Projectionsaxe hinter der verticalen Projectionsebene die horizontale Trace CD schneidet, alsdann keine Veränderung erleidet, und der Punkt c als horizontale Projection des Punktes c c′ einen zweiten Bestimmungspunkt abgiebt. Die verticale Projection jener Linie ergiebt sich, wenn durch den Punkt o′, als verticale Projection von o, und durch c′ die Linie g′ o′ gezogen wird. Es ist nunmehr vermittelst der Durchschnittspunkte b, h′ a′ der Linien a b, a′ b′ und g o, g′ o′ mit den Projectionsebenen die Ebene GFG′ bestimmt, welche die erforderliche Lage gegen die gegebene Ebene CHC′ hat*).

---

*) Es ist bei einigermaassen complicirten Constructionen sehr nützlich, einzelne Resultate durch Nebenoperationen zu verificiren. So ist z. B. in der vorliegenden Figur dieses mit den Punkten o′ und c′ geschehen, die in einer Linie mit dem Punkte g′ liegen müssen, wenn derselbe durch ein in Bezug auf jene Punkte indirectes Verfahren bestimmt worden ist, wie hier durch den Punkt g und eine in der Ebene EDE′ geführte Linie.

Digitized by Google

XXI. Aufgabe.

Wenn zwei Linien gegeben sind, die nicht in einer Ebene liegen, die kürzeste Entfernung dieser Linien von einander zu finden.

Die kürzeste Entfernung zweier Linien von einander wird, wenn diese Linien nicht in einer Ebene liegen, durch eine beiden Linien zugleich perpendiculäre Linie gemessen, welche auf folgende Weise construirt werden kann.

Durch eine der gegebenen Linien, welche die erste heissen mag, führt man der zweiten Linie parallel eine Ebene, und durch die zweite Linie wiederum dieser Ebene eine perpendiculäre Ebene. Alsdann construirt man den Durchschnitt beider Ebenen und errichtet aus dem Punkte, in welchem derselbe die erste Linie schneidet, der ersten Ebene eine Perpendiculäre. Diese Perpendiculäre wird die zweite Linie schneiden und beiden Linien perpendiculär sein.

Der Durchschnitt beider unter jenen Bedingungen construirten Ebenen ist der zweiten Linie parallel, und da zugleich die Ebene des Durchschnitts und der zweiten Linie der ersten durch die erste Linie geführten Ebene perpendiculär ist, so muss jede aus einem Punkte des Durchschnitts auf die erste Ebene errichtete senkrechte Linie auch der zweiten Linie perpendiculär sein. Wenn daher jener Punkt zugleich der ersten Linie angehört, so muss die der Ebene senkrechte Linie zugleich beiden gegebenen Linien perpendiculär sein.

Es sei AB die Projectionsaxe; ab, a′b′ die eine, fg, f′g′ die andere gegebene Linie. Da diese Linien nicht in einer Ebene liegen, so liegen auch nicht die Durchschnittspunkte der Projectionen auf einer der Projectionsaxe perpendiculären Linie. Tab. IV. Fig. 15.

Aus einem Punkte, ee′ auf ab, a′b′, ist eine mit fg, f′g′ parallele Linie cd, c′d′ gezogen, und die Ebene CGC′ durch diese Parallele und durch ab, a′b′ gelegt (Aufg. VI.). Um ferner durch fg, f′g′ eine Ebene der Ebene CGC′ perpendiculär zu führen, ist aus einem Punkte hh′ auf fg, f′g′ der Ebene CGC′ die Perpendiculäre hi, h′i′ errichtet, und durch diese Perpendiculäre, so wie durch fg, f′g′ die Ebene FDF′ gelegt (Aufg. XVI.). Alsdann ist der Durchschnitt beider Ebenen in kl, k′l′ construirt, und aus dem Punkte mm′, in welchem dieser Durchschnitt die Linie ab, a′b′ schneidet, der Ebene CGC′ die Perpendiculäre mo, m′o′ errichtet. Die Linien mo, m′o′ sind also die Projectionen der gesuchten kürzesten Entfernung der gegebenen Linien ab, a′b′ und fg, f′g′ von einander. Die wahre Länge dieser Entfernung ist der Länge der Linie mp gleich (Aufg. II.).

Digitized by Google

XXII. Aufgabe.

Von gegebenen Projectionsebenen vermittelst bekannter Projectionen auf andere Projectionsebenen überzugehen.

Es ist zuweilen zur Vereinfachung von Constructionen im Verlaufe derselben sehr vortheilhaft, die angenommenen Projectionsebenen durch zwei andere einander perpendiculäre Ebenen zu ersetzen, deren Lage gegen die alten Projectionsebenen entweder willkürlich angenommen werden kann, oder zum Theil bedingt ist. Diese, einer Transformation der coordinirten Ebenen in der analytischen Geometrie analoge Operation besteht in dem Verfahren, die in den neuen Projectionsebenen construirten Projectionen eines Punktes in die Ebene der Construction, d. h. in die frühere horizontale Projectionsebene, zu bringen, wozu die Kenntniss der Lage dient, welche Projectionen überhaupt gegen die Durchschnittslinie ihrer Ebenen annehmen, wenn diese Ebenen auf die bekannte Weise mit einander vereinigt sind.

Die Projectionen eines Punktes in den neuen Projectionsebenen sind die Durchschnittspunkte der aus dem Punkte auf diese Ebenen gefällten Perpendiculären mit denselben. Die Durchschnittslinie der neuen Projectionsebenen mit einander ist die neue Projectionsaxe.

Nachdem daher diese Axe und jene Projectionen construirt worden sind, construirt man den Durchschnittspunkt der durch die neuen projicirenden Linien gehenden Ebene mit der Axe und lässt letztere sich mit demselben der frühern horizontalen Projectionsebene anschliessen vermittelst einer verticalen Bewegung um den Durchschnittspunkt mit dieser Ebene. Alsdann bleibt nur übrig, der herabgeschlagenen Axe durch den herabgeschlagenen Punkt eine Perpendiculäre zu führen, und auf diese Perpendiculäre die bekannte Länge der neuen projicirenden Linien von der Axe aus nach der durch die Construction bedingten Lage zu tragen. Hierdurch wird nämlich die Lage des Punktes im Raume gegen die neuen Projectionsebenen auf dieselbe Weise anschaulich, wie früher gegen die alten, und da durch die Operation die Verbindung mit den letztern beibehalten ist, so kann man zu jeder Zeit, nachdem in Bezug auf die neuen Projectionsebenen operirt worden, das Resultat der Construction auf die alten zurückführen.

Im Verlaufe der Operation ergeben sich Mittel, dieselbe bedeutend abzukürzen, besonders wenn die neue verticale Projectionsebene der frühern horizontalen Projectionsebene perpendiculär ist. Da man nun beinahe immer im Stande ist, die Lage einer der neuen Projectionsebenen willkürlich zu bestimmen, so wird man in den meisten Fällen hierauf Rücksicht nehmen können.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Von krummen Flächen, ihren berührenden Ebenen und Normalen.

Mit Hülfe der im vorhergehenden Abschnitte enthaltenen Aufgaben ist man im Stande, jedes zwischen geraden Linien und Ebenen im Raume vorkommende Problem zu lösen, sobald die Natur desselben überhaupt eine Auflösung gestattet. Die hierzu erforderlichen Constructionen lassen sich nämlich immer auf die unter jener Form angegebenen Fundamentaloperationen zurückführen, wie wir bereits in einigen Beispielen gesehen haben. Wir können demnach zur Betrachtung der *krummen Oberflächen* übergehen und sehen, auf welche Weise und in wie fern auch diese sich durch die Methode der Projectionen darstellen und behandeln lassen. Was die *krummen Linien* anbetrifft, so ist es einleuchtend, dass sie sich auf gleiche Weise, wie die geraden, projiciren lassen, indem man sich eben sowohl durch alle Punkte einer krummen Linie auf die Projectionsebenen gefällte Perpendiculären denken kann, deren Durchschnittspunkte mit denselben die Projectionen der Linie bilden. Auf die Construction solcher Linien nach gegebenen Bedingungen werden wir in der Folge kommen.

Alle krummen Flächen sind im Allgemeinen als durch die Bewegung gewisser Linien oder Flächen, in Beziehung auf andere Linien oder Flächen, entstanden denkbar, und können ein Gegenstand geometrischer Untersuchungen werden, sobald das Gesetz der Erzeugung eines bezeichnenden Ausdrucks fähig ist. In diesem Falle wird aber der Charakter eines solchen Gesetzes immer so viel Allgemeinheit haben, dass derselbe nicht einer individuellen Fläche allein, ohne besondere Bestimmungen, sondern einer ganzen Classe von Flächen zukommt, welche demnach sehr verschieden in ihrer Form sein können und dennoch gemeinschaftliche Eigenschaften vermöge einer in gewisser Hinsicht gemeinschaftlichen Entstehung besitzen. Es lassen sich daher die krummen Flächen nach ihrer Erzeugung in verschiedene *Classen* abtheilen, denn obgleich eine und dieselbe Fläche auf verschiedene Weise erzeugt werden kann, so wird doch die einfachste Generation als die Classe bezeichnend anzunehmen sein.

Digitized by Google

Wenn wir gesagt haben, dass alle diese Classen einen Gegenstand geometrischer Untersuchungen abgeben können, so ist dies auf dem analytischen Wege, und selbst dann nur unter Einschränkungen, zu verstehen. Rein geometrisch oder vermittelst Constructionen können aber nur solche eine zweckmässige Behandlung erleiden, die, vermöge verhältnissmässig einfacher Erzeugungsgesetze einer einfachen Darstellung fähig, die erforderlichen graphischen Operationen nicht zu verwickelt und zeitraubend werden lassen. Wir werden uns daher nur auf diese letztern Classen beschränken, und zwar in diesem Abschnitte dieselben grösstentheils in Beziehung auf ihre *berührenden Ebenen* und *Normalen*, im folgenden aber rücksichtlich ihrer *Durchschnitte* mit geraden Linien, Ebenen und mit einander selbst, unter der angenommenen Form von Aufgaben, betrachten. Durch eine zweckmässige Combination der in diesen Aufgaben entwickelten Methoden wird man alsdann im Stande sein, eine Menge interessanter Probleme zu lösen.

Diese Classen sind nun: die *Cylinderflächen*, die *Kegelflächen*, die *Umwälzungsflächen* (surfaces de révolution) und diejenige Fläche, welche im Französischen die Benennung *Cylindre gauche* als eine Gattung der unter dem Namen surfaces gauches begriffenen Flächen führt, wir aber *gewundene Cylinderflächen* benennen werden. Wir wollen diese Classen jetzt einzeln in Beziehung auf ihre unserm Zwecke angemessene Generation, Darstellung und einige geometrischen Eigenschaften, auf welche wir uns in der Folge öfters beziehen werden, betrachten.

1. *Die Cylinderflächen.*

Eine Cylinderfläche entsteht *durch die Bewegung einer geraden Linie längs einer krummen, indem die gerade stets einer andern geraden Linie oder sich selbst parallel bleibt.* Die als unbeweglich angesehene Curve, welche jede mögliche Form haben kann, heisst die *Directrice*, die bewegliche gerade Linie aber die *Generatrice* der Cylinderfläche, und man sieht, dass, wenn die Directrice und die Gerade, welcher die Generatrice parallel sein soll, in Bezug auf die Projectionsebenen gegeben sind, hierdurch die ganze Cylinderfläche gegeben ist, indem man nur aus beliebigen Punkten der Directrice der gegebenen Geraden parallele Linien zu ziehen braucht, um die Generatrice in eben so vielen verschiedenen Lagen, die sie während ihrer Bewegung annimmt, darzustellen. Daher werden solche Linien selbst Generatricen genannt.

Eine *berührende Ebene* wird im Allgemeinen durch alle einer krummen Fläche in einem Punkte geführte Tangenten gebildet, und die in dem Berührungspunkte einer solchen Ebene errichtete Perpendiculäre ist die *Normale* der krummen Fläche in diesem Punkte. Da es nun einleuchtend ist, dass die Generatricen einer Cylinderfläche als Tangenten derselben anzusehen sind, so wird eine berührende Ebene eine solche Fläche nicht nur in einem Punkte, sondern in der ganzen Ausdehnung einer Generatrice berühren, so wie alle dieser Generatrice errichteten Perpendiculären Normalen der Fläche sein werden und ihrerseits eine Ebene bilden, welche eine *Normalebene* heisst. Ferner wird die Durchschnittslinie einer berührenden Ebene mit irgend einer Ebene eine

Digitized by Google

Tangente der Section der Cylinderfläche durch dieselbe Ebene in dem Durchschnittspunkte mit der berührten Generatrice sein. Man wird daher allemal einer Cylinderfläche eine berührende Ebene und Normale führen können, sobald man im Stande ist, irgend einer Section derselben eine Tangente zu führen, denn eine solche Tangente und die durch den Berührungspunkt gehende Generatrice bestimmen jene Ebene vollkommen.

Jede Section, oder überhaupt jede auf einer Cylinderfläche sich befindende krumme Linie kann ihrerseits als Directrice derselben individuellen Fläche dienen. Man kann daher eine Cylinderfläche durch ihre Section mit der Horizontalebene, welche die *Basis* der Fläche genannt wird, und durch die Richtung einer Generatrice darstellen. Dieser für die Praxis sehr bequemen Methode werden wir uns in den folgenden Aufgaben bedienen.

Da alle Generatricen einander parallel sind, und eine berührende Ebene immer eine Generatrice enthält, so ist es eine charakteristische Eigenschaft der Cylinderflächen, dass ihre berührenden Ebenen ihren Generatricen *parallel* sind.

Die Sectionen einer Cylinderfläche durch parallele Ebenen sind gleiche und congruirende krumme Linien. Der Grund hiervon liegt in dem Parallelismus der Generatricen, als aus welchen zusammengesetzt eine solche Fläche angesehen werden muss. Die Corden der in den verschiedenen Sectionen durch zwei Generatricen abgetheilten Bogen sind sich nämlich einander gleich, woraus sich die Gleichheit und Aehnlichkeit aller auf diese Weise gebildeten Polygone, folglich die Congruenz der Curven selbst ergiebt.

Wenn zur Erzeugung einer Cylinderfläche statt der Directrice eine *krumme Fläche* im Allgemeinen unter der Bedingung angewendet wird, dass die Generatrice dieselbe fortführend und in allen Lagen berühren soll, so wird die hierdurch gebildete Cylinderfläche jene krumme Fläche gleichsam umhüllen und daher *umhüllender Cylinder* (Cylindre enveloppe) genannt werden. Die durch die Berührungspunkte mit der Generatrice gebildete krumme Linie heisst die *Berührungscurve* (courbe de contact). Die Construction solcher umhüllender Cylinderflächen und Berührungscurven ist zur Auflösung vieler Probleme erforderlich.

2. *Die Kegelflächen.*

Die Kegelflächen haben in ihrer Erzeugung die grösste Analogie mit den Cylinderflächen. So wie diese werden jene *durch die Bewegung einer geraden Linie längs einer krummen* hervorgebracht, nur ist die gerade unterworfen, *beständig durch einen Punkt zu gehen*, welcher der *Scheitel* der Kegelfläche heisst. Die zur Erzeugung dienenden Linien werden ebenfalls *Directrice* und *Generatrice* genannt, und man sieht, dass eine Kegelfläche vollkommen durch die Projectionen der Directrice und des Scheitels bestimmt ist, indem die Generatrice sich in jeder Lage construiren lässt, wenn man einen Punkt der Directrice mit dem Scheitel durch eine gerade Linie verbindet.

Was von den berührenden Ebenen, den Normalen und der Basis in Betreff der Cylinderflä-

Digitized by Google

eben gesagt worden ist, gilt in gleichem Maasse von den Kegelflächen. Man wird nun finden, dass als charakteristische Eigenschaft dieser letztern eine berührende Ebene immer durch den Scheitel gehen muss.

Wenn man eine Kegelfläche in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet, so sieht man, dass dieselbe aus zwei Theilen besteht, die nur einen Punkt, den Scheitelpunkt, gemeinschaftlich haben, indem die Generatrice durch die ihr eigenthümliche Bewegung zwei ganz gleiche Flächen bilden muss.

Alle durch einander parallele Ebenen entstehenden Sectionen einer Kegelfläche sind ähnliche und auf ähnliche Weise gelegene Curven. Zieht man nämlich die Corden der durch die Generatricen abgetheilten Bogen verschiedener Sectionen, so ist durch die Aehnlichkeit der hierdurch entstehenden Dreiecke leicht zu erweisen, dass sich die Corden einer Section zu einander verhalten, wie die correspondirenden Corden in einer andern Section. Hieraus wird die Aehnlichkeit der auf diese Weise in den verschiedenen Sectionen beschriebenen Polygone, mithin die der Sectionen selbst folgen.

Mit Beachtung des wesentlichen Unterschiedes der Generation überhaupt entsteht auf gleiche Weise wie der umhüllende Cylinder *der umhüllende Kegel* (cône enveloppe); eine Fläche, die in den Constructionen noch häufiger ihre Anwendung findet als jene. Beide Flächen reduciren sich auf berührende Ebenen, wenn Cylinder- oder Kegelflächen umhüllt werden sollen, so wie die Berührungscurven sich in diesem Falle in gerade Linien, Generatricen der umhüllten Flächen, verwandeln.

3. *Die Umwälzungsflächen.*

Eine Umwälzungsfläche entsteht *durch die Bewegung einer krummen Linie um eine gerade, indem während der Bewegung jeder Punkt der krummen Linie stets in gleicher Entfernung von der geraden bleibt.* Die sich bewegende krumme Linie heisst die *Generatrice;* die unbewegliche gerade die *Axe* der Fläche. Man sieht, dass als charakteristisches Kennzeichen der Umwälzungsflächen jeder Punkt derselben auf einem *Kreise* liegt, dessen Ebene der Axe perpendicular ist, und dessen Mittelpunkt auf der Axe sich befindet.

Eine Umwälzungsfläche kann in allen ihren Theilen construirt werden, oder ist gegeben, sobald die Projectionen ihrer Generatrice und die der Axe bekannt sind, indem man nur durch irgend einen Punkt der Generatrice der Axe eine perpendiculäre Ebene zu führen braucht, um in der Entfernung des Durchschnittspunktes dieser Ebene mit der Axe von dem angenommenen Punkte die Länge des Halbmessers des Kreises zu finden, welchen dieser Punkt während seiner Bewegung beschreibt. Eine solche Ebene heisst eine *Parallelebene*, und die Section derselben eine *Parallelsection* oder ein *Parallelkreis*.

Jede durch die Axe einer Umwälzungsfläche gehende Ebene wird eine *Meridianebene* genannt,

Digitized by Google

und alle *Sectionen einer solchen Fläche durch Meridianebenen sind gleiche und congruirende Curven.* Denkt man sich nämlich durch die Durchschnittspunkte von zwei Parallelkreisen und zwei Meridiansectionen die Halbmesser der Kreise und die Corden der abgeschnittenen Bogen der Meridiansectionen, so werden durch diese Linien und den zwischen den Parallelebenen befindlichen Theil der Axe zwei gleiche und ähnliche Trapeze gebildet, woraus sich die Gleichheit der Corden, mithin die Congruenz der auf jene Weise in den Meridiansectionen beschriebenen Polygone und zuletzt die der Sectionen selbst ergiebt. Hieraus folgt nun, dass alle Tangenten einer Umwälzungsfläche, deren Berührungspunkte auf einem Parallelkreise liegen, die Axe in einem Punkte schneiden, wenn diese Tangenten in Meridianebenen liegen, oder Tangenten der Meridiansectionen sind. Dasselbe gilt von den Normalen dieser letzteren bei auf einem Parallelkreise liegenden Durchschnittspunkten mit der Umwälzungsfläche.

Eine Normale einer Meridiansection ist der Umwälzungsfläche selbst normal. Wenn nämlich in dem Durchschnittspunkte einer solchen Normale, oder in dem Fusse derselben, dem durch diesen Punkt gehenden Parallelkreise eine Tangente geführt wäre, so würde, da die Ebenen des Parallelkreises und der Meridiansection sich einander perpendiculär sind und sich in dem durch jenen Punkt gehenden Halbmesser des Parallelkreises schneiden, diese Tangente der Meridianebene, mithin auch der Normale der Meridiansection perpendiculär sein. Diese Normale ist daher zweien die Umwälzungsfläche in einem Punkte berührenden Linien oder der durch diese Linien gelegten berührenden Ebene perpendiculär, folglich eine Normale jener Fläche. Man wird nun schliessen, dass *alle Normalen einer Umwälzungsfläche die Axe schneiden, diejenigen aber in einem Punkte, deren Fuss auf einem Parallelkreise liegt.* —

Zufolge der Congruenz der Meridiansectionen einer Umwälzungsfläche kann man dieselben als Generatricen dieser Fläche betrachten. Hieraus lässt sich eine einfache Darstellungsmethode der Umwälzungsflächen zum Behufe von Constructionen herleiten, von der man gewöhnlich in der Projectionslehre Gebrauch macht. Sobald man nämlich die verticale Projectionsebene der Axe einer solchen Fläche parallel annimmt, so erscheint die in der dieser Projectionsebene parallelen Meridianebene construirte Meridiansection in ihrer wahren Gestalt und lässt daher ohne Schwierigkeit von der Gestalt der Fläche selbst urtheilen. Diese Section heisst die *ebene Generatrice* der Umwälzungsfläche, weil die ursprüngliche Generatrice eine Curve von *gedoppelter Krümmung*, wie im Allgemeinen die Directrices der Cylinder- und Kegelflächen, sein kann, d. h. eine Curve, deren Theile nicht in einer Ebene liegen.

Allgemein bekannte Flächen, wie die Kugelflächen, die Ringflächen, so wie die durch Drechseln und auf der Töpferscheibe gebildeten Formen gehören zu den Umwälzungsflächen.

4. *Die gewundenen Cylinderflächen.*

Diese Flächen sind eine Gattung einer Classe von Flächen, welche durch die Bewegung einer

Digitized by Google

geraden Linie längs dreien Curven, im Allgemeinen von gedoppelter Krümmung, hervorgebracht werden, und entstehen *durch die Bewegung einer geraden Linie längs zwei Curven, indem die Gerade zugleich beständig einer Ebene von unveränderlicher Lage parallel bleibt.* Die krummen Linien heissen die *Directricen*, die gerade sich bewegende Linie wird die *Generatrice*, und die Ebene, welcher sie beständig parallel bleibt, die *Parallelebene* genannt.

Eine gewundene Cylinderfläche ist gegeben, oder kann in allen ihren Theilen construirt werden, sobald die beiden Directricen und die Parallelebene gegeben sind. Um nämlich für irgend einen Punkt auf einer der Directricen die correspondirende Lage der Generatrice zu finden, hat man durch diesen Punkt der Parallelebene eine parallele Ebene zu führen und den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der andern Directrice zu construiren; alsdann stellt eine beide Punkte verbindende gerade Linie die Generatrice in der verlangten Lage dar.

Da die gewundenen Cylinderflächen durch eine gerade Linie erzeugt werden, so muss eine berührende Ebene einer solchen Fläche die durch den Berührungspunkt gehende Generatrice enthalten. Indessen wird diese Ebene die Fläche nicht in der ganzen Ausdehnung der Generatrice berühren, so wie die Cylinder- und Kegelflächen von ihren berührenden Ebenen berührt werden. Der Grund hiervon liegt nämlich bei den Cylinderflächen in der Gleichheit, und bei den Kegelflächen in der Aehnlichkeit paralleler Sectionen, indem sich in beiden Fällen leicht beweisen lässt, dass den verschiedenen Sectionen in einer Generatrice correspondirenden Punkten geführte Tangenten parallele Linien sind; dass folglich, wenn eine dieser Tangenten in einer berührenden Ebene liegt, auch alle übrigen in derselben Ebene enthalten sein müssen, welche daher die Generatrice in allen jenen Punkten berührt. Bei den gewundenen Cylinderflächen hingegen findet weder Gleichheit noch Aehnlichkeit paralleler Sectionen statt, da sich zwei auf einander folgende Generatricen, als in verschiedenen Ebenen gelegen, weder einander parallel sind, noch einander schneiden. Diese Flächen müssen also durch eine berührende Ebene in der durch den Berührungspunkt gehenden Generatrice *geschnitten* werden.

Hieraus folgt nun, dass alle Punkte jener Generatrice eben so viele Berührungspunkte verschiedener berührender Ebenen abgeben, die sich alle einander in der Generatrice schneiden, oder dass eine berührende Ebene einer gewundenen Cylinderfläche vermittelst einer *Bewegung* um die durch den Berührungspunkt gehende Generatrice verschiedene Lagen einnehmen kann, ohne aufzuhören, eine berührende Ebene der Fläche zu sein. Diese Eigenschaft ist der ganzen Classe von Flächen, zu welchen die gewundenen Cylinderflächen gehören, ausschliesslich eigenthümlich.

Wenn die beiden Directricen einer gewundenen Cylinderfläche gerade Linien sind, so nimmt dieselbe den Namen *gewundene Ebene* (plan gauche) an.

Eine gewundene Ebene wird durch jede den Directricen parallele Ebene nach einer geraden Linie geschnitten.

Digitized by Google

Es seien A A′ und C C′ die Directricen; A C, A′ C′, A″ C″ drei Generatricen einer gewundenen Ebene in perspectivischer Ansicht. Tab. IX. Fig. 23.

Um die Lage der verschiedenen, die Generation der Fläche und den zu beweisenden Satz bedingenden Ebenen darzustellen, sind die Durchschnitte derselben mit einander und mit einer durch die Linien C C″ und A″ C″ gehenden Ebene construirt. Die Linien a C, a′ C′ sind die Durchschnitte der Ebenen der Generatricen mit dieser Ebene, folglich A″ C″ parallel, und A a, B″ b sind die Durchschnitte zweier einander paralleler Ebenen mit derselben Ebene, von denen die erste durch die Directrice A A″ geht und der Directrice C C″ parallel ist, die andere also irgend eine schneidende Ebene in der erforderlichen Lage darstellt. Ferner sind A a, B b, A′ a′, B′ b′ die Durchschnitte der Ebenen der Generatricen, der Directrice und der schneidenden Ebene mit einander. Es steht nun zu beweisen, dass die Punkte B, B′, B″, in welchen die schneidende Ebene die Generatricen trifft, in einer geraden Linie liegen.

Vermöge des Parallelismus der Linien A a, A′ a′ B′ b′; A″ a, B″ b; C a, C′ a′ ist $\frac{A\,a}{A'\,a'} = \frac{B\,b}{B'\,b'}$. Da nun ferner auch $\frac{A\,a}{A'\,a'} = \frac{B''\,b}{B''\,b'}$, so ist $\frac{B\,b}{B'\,b'} = \frac{B''\,b}{B''\,b'}$, woraus folgt, dass die Punkte B, B′, B″ in einer geraden Linie liegen.

Eine solche Linie heisst eine *transversale Generatrice*. Man sieht nämlich, dass eine gewundene Ebene auch durch eine gerade Linie erzeugt werden kann, welche sich längs zwei Generatricen einer den Directricen parallelen Ebene parallel bewegt.

Da zwei krumme Flächen einander berühren, wenn sie in einem Punkte eine gemeinschaftliche berührende Ebene haben, so wird eine gewundene Cylinderfläche längs einer ganzen Generatrice von einer gewundenen Ebene berührt, deren Directricen, bei einer beiden Flächen gemeinschaftlichen Parallelebene, Tangenten der Directricen der gewundenen Cylinderfläche in den Durchschnittspunkten mit einer Generatrice sind.

Wenn eine gewundene Cylinderfläche durch zwei der verticalen Projectionsebene parallele Ebenen geschnitten wird, so nehmen die hierdurch entstehenden Sectionen den Namen *ebene Directricen* an, weil dieselben gleich den frühern die Bewegung der Generatrice leiten können. Gewöhnlich bedient man sich dieser ebenen Directricen zur Vereinfachung von Construçtionen, so wie man aus demselben Grunde den Projectionsebenen wo möglich eine solche Lage zu geben sucht, dass die Parallelebene vertical werde. Hierdurch erscheinen nämlich die horizontalen Projectionen der Generatricen als der horizontalen Trace dieser Ebene parallele Linien.

Die gewundenen Cylinderflächen werden häufig in der Baukunst zu verschiedenen Zwecken angewendet. Als Beispiel lässt sich die innere Fläche einer Wendeltreppe anführen. Die Directricen derselben sind eine gerade verticale Linie und eine Curve von gedoppelter Krümmung,

Digitized by Google

welche, unter dem Namen der Schraubenlinie in den Künsten bekannt, sich auf einer Cylinderfläche befindet, deren Generatricen einer horizontalen Ebene perpendiculär sind und von der Curve unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Die Parallelebene ist eine horizontale Ebene. Ferner lehrt die Erfahrung, dass das natürliche Terrain im Allgemeinen Flächen bilde, deren Gestalt am nächsten den gewundenen Cylinderflächen gleichkommt. Wenn man daher demselben eine künstliche Form geben will, so legt man die Generation dieser letztern den zu der Operation erforderlichen Constructionen oder Rechnungen zum Grunde, sobald mit Genauigkeit verfahren werden soll.

Nachdem wir nunmehr die verschiedenen krummen Flächen, welche ein Gegenstand der folgenden Aufgaben sein werden, durchgegangen sind, ist es hier der Ort, bevor wir zu den Aufgaben selbst übergehen, noch einer Classe von Flächen zu erwähnen, zu welcher die Cylinder- und Kegelflächen in gewisser Hinsicht zu rechnen sind, derjenigen Flächen nämlich, welche die Eigenschaft besitzen, sich einer Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung, ohne Zertrennung oder Uebereinanderlegung ihrer Theile, anschliessen zu können, oder welche *entwickelungsfähig* (développable) sind.

Man sieht, dass diese Flächen aus geraden Linien zusammengesetzt sein müssen, von denen je zwei und zwei unendlich nahe an einander liegende als in einer Ebene befindlich angesehen werden können. Alsdann kann nämlich ein von zwei solchen Linien begränztes Element der krummen Fläche durch eine Bewegung um eine dieser Linien oder Gränzen in die Ebene des anstossenden Elements gelangen, und beide wiederum auf ähnliche Weise in die Ebene eines dritten, bis endlich die ganze Fläche entwickelt ist. Durch folgende Generation einer krummen Fläche wird nun im Allgemeinen jene Eigenschaft hervorgebracht werden.

Es sei eine Ebene unterworfen, sich durch alle Punkte einer Curve von gedoppelter Krümmung zu bewegen und dabei beständig der Tangente in dem jedesmaligen Durchschnittspunkte perpendiculär, oder der Curve normal zu sein. Denkt man sich nun eine Reihe von Ebenen, welche jene Ebenen in ihren verschiedenen Lagen darstellen, so werden zwei auf einander folgende Ebenen einander schneiden, und zwei consecutive Durchschnitte müssen, als in einer Ebene gelegen, sich in irgend einem Punkte begegnen. Es wird daher die von den Winkelflächen der consecutiven Durchschnitte gebildete Oberfläche ohne Zweifel auf die oben angegebene Weise entwickelungsfähig sein, und diese Eigenschaft noch beibehalten, wenn sie in eine krumme Oberfläche übergeht, indem die der krummen Linie normalen Ebenen sich unendlich nähern, oder die Continuität der Bewegung einer normalen Ebene eintritt*).

*) Alsdann werden jene Durchschnitte zu Generatricen, und diese normalen Ebenen zu berührenden Ebenen der krummen entwickelungsfähigen Fläche.

Digitized by Google

Diese Generation ist auf alle entwickelungsfähigen krummen Flächen, von denen die Cylinder- und Kegelflächen nur besondere Fälle sind, anwendbar. Eine Cylinderfläche würde nämlich entstehen, wenn die gedachte krumme Linie eine ebene Curve wäre, indem alsdann die normalen Ebenen, als der Ebene derselben perpendiculär, sich in lauter einander parallelen Linien schneiden würden; eine Kegelfläche, wenn die krumme Linie, welche im Allgemeinen von den Durchschnittspunkten der consecutiven Durchschnitte der normalen Ebene auf der entwickelungsfähigen Fläche gebildet wird, sich vermöge einer besondern Gestaltung der zur Erzeugung dienenden Curve auf einen Punkt reducirte, welcher alsdann der Scheitel der Kegelfläche sein würde.

Die Entwickelung einer Cylinderfläche gewährt keine Schwierigkeit, sobald man im Stande ist, eine durch eine den Generatricen perpendiculäre Ebene gebildete Section zu rectificiren, indem man nur in den Endpunkten der rectificirten Linie derselben perpendiculäre Linien zu errichten hat, um die Gränzen der entwickelten Fläche darzustellen. Jene Section wird nämlich zur geraden und den Generatricen perpendiculären Linie, wenn die Fläche entwickelt ist, da die hierzu erforderliche Bewegung der Bogenelemente in einer der jedesmal als Axe betrachteten Generatrice perpendiculären Richtung vor sich geht, und die Generatricen sich fortwährend parallel bleiben müssen. Die hierher gehörigen Probleme, z. B. die Construction irgend einer Section im entwickelten Zustande der Fläche, wird man mit Leichtigkeit lösen können, sobald man vermittelst der folgenden Aufgaben sich mit der Behandlung der krummen Flächen und ihrer Natur überhaupt näher vertraut gemacht hat. Die Entwickelung einer Kegelfläche wird in der Folge durch ein Beispiel erläutert werden.

I. Aufgabe.

Wenn eine Cylinderfläche durch die Projectionen der Directrice und einer Generatrice, oder eine Kegelfläche durch die Projectionen der Directrice und des Scheitels gegeben ist, die Basis einer dieser Flächen zu construiren.

Wir haben gesehen, dass die Basis einer der vorgelegten Flächen die Section derselben mit der horizontalen Projectionsebene ist. Wenn man also in beiden Fällen die Durchschnittspunkte einer beliebigen Anzahl von Generatricen mit der horizontalen Projectionsebene construirt, so wird man eben so viele der Basis angehörige Punkte finden.

Es sei AB die Projectionsaxe; $CC^1C^2C^3C^4C^5$ die horizontale, $cc^1c^2c^3c^4c^5$ die verticale Projection der Directrice einer Cylinderfläche; CD, cd eine gegebene Generatrice. Tab. V, Fig. 16.

Zieht man nun durch die Punkte C^1c^1 C^2c^2 u. s. w. die der Linie CD, cd parallelen Linien C^1D^1, c^1d^1; C^2D^2, c^2d^2 u. s. w., welches Generatricen der Fläche sind, so ergeben sich die Durchschnittspunkte derselben, so wie der gegebenen Generatrice mit der horizontalen Proje-

Digitized by Google

ctionsebene, in den Punkten $D D^1 D^2 D^3 D^4 D^5$, und eine durch diese Punkte gehende krumme Linie ist die gesuchte Basis.

Auf gleiche Weise durch einen *Punkt* als Scheitel einer Kegelfläche geführte Linien würden durch ihre Durchschnittspunkte mit der horizontalen Projectionsebene die Basis einer Kegelfläche bilden.

II. Aufgabe.

Wenn eine Cylinderfläche durch ihre Basis und eine Generatrice, oder eine Kegelfläche durch ihre Basis und den Scheitel gegeben ist, durch einen Punkt auf einer dieser Flächen derselben eine berührende Ebene und Normale zu führen.

In beiden Fällen construirt man die durch den gegebenen Punkt gehende Generatrice, führt der Basis in dem Punkte, in welchem sie von dieser Generatrice getroffen wird, eine Tangente und legt durch beide Linien eine Ebene, welche die verlangte berührende Ebene sein wird.

Diese Ebene enthält zwei Tangenten in einem Punkte der Fläche, von welchen eine eine Generatrice der letzten ist, berührt folglich die Fläche längs dieser ganzen Generatrice, oder in jedem auf derselben gelegenen Punkte.

Tab. V. Fig. 17. Es sei AB die Projectionsaxe; $C C' C'' C'''$ die Basis; D d der Scheitel einer Kegelfläche; a a′ ein auf derselben gelegener Punkt, durch welche eine berührende Ebene und Normale geführt werden soll.

Die durch den Durchschnittspunkt E der dem Punkte a a′ correspondirenden Generatrice E D, e d der Basis geführte Tangente F B ist die horizontale Trace der gesuchten Ebene. Die verticale Trace derselben ergiebt sich, wenn durch den Durchschnittspunkt der Generatrice E D, e d, mit der verticalen Projectionsebene die Linie F B gezogen wird, und die aus dem Punkte a a′ der Ebene errichtete Perpendiculäre a n, a′ n′ ist die gesuchte Normale.

III. Aufgabe.

Durch einen im Raume ausserhalb einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche gegebenen Punkt einer dieser Flächen eine berührende Ebene zu führen.

Für die Cylinderfläche führt man durch den gegebenen Punkt den Generatricen derselben eine parallele Linie, construirt den Durchschnittspunkt derselben mit der horizontalen Projectionsebene und führt aus diesem Punkte der Basis eine Tangente. Eine durch diese Tangente und die parallele Linie geführte Ebene ist die verlangte berührende Ebene.

Für die Kegelfläche construirt man den Durchschnittspunkt der durch den gegebenen Punkt

Digitized by Google

und den Scheitel gehenden Linie mit der horizontalen Projectionsebene und verfährt sonst auf ganz gleiche Weise.

Die Tracen der die Cylinder- oder Kegelflächen berührenden Ebenen sind immer Tangenten der Basis dieser Flächen. Daher dient eine solche Tangente in Verbindung mit einer andern Linie, welche ihrer Lage nach in der durch den gegebenen Punkt zu führenden berührenden Ebene enthalten sein muss, zur Bestimmung dieser letztern. Da nämlich die eine Cylinderfläche berührenden Ebenen den Generatricen derselben parallel sind, und die einer Kegelfläche durch den Scheitel gehen, so werden in beiden Fällen die auf die angegebene Weise geführten Linien die hierzu erforderliche Lage haben. Man sieht, dass, wenn man aus dem Durchschnittspunkte einer dieser Linien der jedesmaligen Basis mehrere Tangenten führen kann, auch eben so viele der Aufgabe genügende berührende Ebenen geführt werden können.

Tab. VI. Fig. 18.

Es sei AB die Projectionsaxe; DD′D″D‴ die Basis; DE, de eine Generatrice einer Cylinderfläche, und aa′ ein Punkt, durch welchen dieser Fläche berührende Ebenen geführt werden sollen.

Die durch den Durchschnittspunkt C mit der horizontalen Projectionsebene der den Generatricen parallel durch den Punkt aa′ geführten Linie al, a′l′ der Basis geführten Tangenten BF und GH sind die horizontalen Tracen der gesuchten Ebene. Die verticale Trace BF′ der einen ergiebt sich vermittelst des Punktes B und des Durchschnittspunktes c′ der Linien al, a′l′ mit der verticalen Projectionsebene; die der andern Ebene aber H′G′ mit Hülfe des Durchschnittspunktes e‴ der berührten Generatrice D‴E‴, d‴e‴ mit der verticalen Projectionsebene, da die horizontale Trace HG die Projectionsaxe nicht innerhalb der Tafel schneidet. Die berührenden Ebenen sind also die Ebenen FBF′ und HG, H′G′.

IV. Aufgabe.

Einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche einer gegebenen Linie parallel eine berührende Ebene zu führen.

Für die Cylinderfläche führt man durch die gegebene Linie den Generatricen eine parallele Ebene und construirt dieser Ebene parallel eine Ebene, deren horizontale Trace zugleich eine Tangente der Basis ist. Dieses ist die verlangte berührende Ebene.

Sie enthält nämlich eine Tangente der Fläche und ist den Generatricen und der gegebenen Linie parallel, indem man sie einer Ebene parallel geführt hat, welche die gegebene Linie enthält und den Generatricen parallel geführt worden ist.

Für die Kegelfläche zieht man aus dem Scheitel der gegebenen Linie eine Parallele und führt

Digitized by Google

durch diese Parallele, oder, was dasselbe ist, durch einen Punkt derselben (Aufg. III.) eine berührende Ebene. Dieses wird die gesuchte Ebene sein.

Sie enthält eine Linie, welche der gegebenen Linie parallel ist und berührt die vorgelegte Fläche.

Wenn man in beiden Fällen unter den angegebenen Bedingungen mehrere Ebenen construiren kann, so ist die Aufgabe auch mehrerer Auflösungen fähig.

Tab. VI. Fig. 19. Es sei AB die Projectionsaxe; DD′D″D‴ die Basis; Cc der Scheitel einer Kegelfläche; ab, a′b′ eine Linie, welcher parallel dieser Fläche eine berührende Ebene geführt werden soll.

Die aus dem Durchschnittspunkte e der durch den Scheitel gehenden und der Linie ab, a′b′ parallelen Linie Ce, c′e′ mit der horizontalen Projectionsebene der Basis geführte Tangente FE ist die horizontale Trace der gesuchten Ebene. Die verticale Trace derselben EF′ ergiebt sich mit Hülfe des Durchschnittspunktes g′ einer durch den Scheitelpunkt und der horizontalen Trace parallel geführten Linie Cg, cg′ mit der verticalen Projectionsebene. Hierzu hätte auch die berührte Generatrice CD″, cd″ dienen können.

Man sieht, dass die zweite Tangente der Basis GH die horizontale Trace einer zweiten, gleichfalls die Bedingungen der Aufgabe erfüllenden, berührenden Ebene ist.

V. Aufgabe.

Einer gegebenen Ebene parallel einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche eine Normale zu führen.

Für die Cylinderfläche errichtet man aus irgend einem Punkte im Raume der gegebenen Ebene eine Perpendiculäre, führt dieser Linie parallel der vorgelegten Fläche eine berührende Ebene (Aufg. IV.) und construirt die berührte Generatrice. Jede durch einen Punkt dieser Generatrice auf die berührende Ebene gefällte Perpendiculäre ist eine Normale in der verlangten Richtung.

Die berührende Ebene ist der gegebenen Ebene perpendiculär, folglich sind alle Normalen der erstern der letztern parallel.

Für die Kegelfläche wird aus demselben Grunde dieselbe Construction angewendet, nur muss die Perpendiculäre auf die gegebene Ebene aus dem Scheitel gefällt werden.

Tab. VII. Fig. 20. Es sei AB die Projectionsaxe; $EE^1E^2E^3E^4$ die Basis, EF, ef eine Generatrice einer Cylinderfläche; DCD′ eine Ebene, welcher parallel der gegebenen Fläche eine Normale geführt werden soll.

Durch einen Punkt im Raume aa′ ist eine der Ebene DCD′ perpendiculäre und den Generatricen parallele Ebene KIK gelegt, welche daher durch die jener Ebene perpendiculäre Linie ab, a′b′ und die den Generatricen parallele Linie cd, c′d′ zu führen war. Dieser Ebene parallel können nun zwei die Cylinderfläche berührende Ebenen KI′K und KI″K geführt werden,

Digitized by Google

welche die Fläche in den Generatricen $E^3 F^3$, $e^3 f^3$ und $E^4 F^4$, $e^4 f^4$ berühren. Jede aus einem Punkte dieser Linien der correspondirenden berührenden Ebene errichtete Perpendiculäre ist eine Normale in der erforderlichen Lage.

VI. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt im Raume ausserhalb einer gegebenen Cylinder- oder Kegelfläche einer dieser Flächen eine Normale zu führen.

Um diese Aufgabe zu lösen, muss man sich einer ziemlich complicirten Construction unterziehen, indem sich die der gesuchten Normale correspondirende berührende Ebene nicht unmittelbar finden lässt. Indessen wird die folgende Methode in der Praxis einige Abkürzungen erleiden können.

Man construirt in beiden Fällen eine beliebige Anzahl die vorgelegte Fläche berührender Ebenen, fällt auf jede dieser Ebenen aus dem gegebenen Punkte eine Perpendiculäre und construirt die Durchschnittspunkte aller Perpendiculären mit ihren correspondirenden Ebenen. Alle diese Durchschnittspunkte werden eine krumme Linie bilden, welche man als Directrice einer zweiten Cylinderfläche, deren Generatricen der gegebenen parallel sind, oder einer zweiten Kegelfläche, welche mit der gegebenen einen Scheitel hat, ansieht und demzufolge die Basis der Fläche construirt. Zieht man nun aus dem Durchschnittspunkte dieser Basis mit der Basis der gegebenen Fläche die correspondirende Generatrice, so ist diese Generatrice beiden Flächen gemeinschaftlich und schneidet folglich die Directrice der Hülfsfläche in einem Punkte, welcher der gegebenen Fläche angehört und den Fuss der gesuchten Normale bildet. Eine Linie, welche diesen Punkt mit dem im Raume gegebenen Punkte verbindet, ist daher die gesuchte Normale.

Diese Linie ist nämlich einer Linie perpendiculär, welche, in einer berührenden Ebene enthalten, zugleich eine Generatrice der vorgelegten Fläche ist.

VII. Aufgabe.

Wenn die Axe und die Generatrice einer Umwälzungsfläche gegeben sind, die ebene Generatrice, oder die Section dieser Fläche mit der der verticalen Projectionsebene parallelen Meridianebene zu construiren *).

Da wir gesehen haben, dass alle Punkte einer Umwälzungsfläche auf Kreisen liegen, welche

*) In dieser und den folgenden Aufgaben, in welchen nur *eine* Umwälzungsfläche vorkömmt, setzt man immer voraus, dass die Umwälzungsaxe der horizontalen Projectionsebene perpendiculär sei. Sollte in der Praxis diese zu Constructionen sehr bequeme Lage einmal nicht stattfinden, so kann man dieselbe durch eine Transformation der Projectionsebene (Erst. Abschn. Aufg. XXII.) zu Wege bringen.

Digitized by Google

Sectionen der Fläche durch der Axe perpendiculäre Ebenen sind und den Namen Parallelkreise führen, so werden die Durchschnittspunkte solcher Kreise mit der gegebenen Meridianebene die gesuchte ebene Generatrice bilden.

Zwei solche Durchschnittspunkte liegen nun offenbar auf der Durchschnittslinie der Ebene eines Parallelkreises mit der Meridianebene. Man führt daher durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Generatrice eine der Axe perpendiculäre Ebene, construirt die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Meridianebene, und die Durchschnittspunkte derselben Ebene mit der Axe und mit der Generatrice. Die Entfernung dieser Durchschnittspunkte von einander bildet den Radius des Parallelkreises, dessen wahre Länge man nunmehr von der Axe aus zu beiden Seiten derselben auf die Projectionen der Durchschnittslinie trägt, wodurch jene beiden Punkte der ebenen Generatrice bestimmt werden. Dieses Verfahren kann so oft wiederholt werden, als man zur vollständigen Darstellung der Curve für nöthig erachtet.

Die ganze Construction wird durch die perpendiculäre Lage der Umwälzungsaxe gegen die horizontale Projectionsebene sehr einfach. Hierdurch erscheinen nämlich die der Axe perpendiculären Hülfsebenen als der Projectionsaxe parallele Linien in der verticalen Projectionsebene, von denen jede zugleich die verticale Projection des Durchschnitts einer der Ebenen mit der gegebenen Meridianebene ist, und die wahre Länge des Radius eines Parallelkreises wird unmittelbar in der Entfernung der horizontalen Projection der Axe von der horizontalen Projection des Durchschnittspunktes der correspondirenden Parallelebene mit der Generatrice gefunden.

VIII. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt auf einer durch ihre Axe und ebene Generatrice gegebenen Umwälzungsfläche derselben eine berührende Ebene und Normale zu führen.

Es kömmt bei dieser, so wie bei allen ähnlichen Aufgaben darauf an, durch den gegebenen Punkt der gegebenen Fläche zwei Tangenten zu führen, indem hierdurch eine berührende Ebene, wie wir bereits gesehen haben, bestimmt wird.

Die Tangenten einer krummen Fläche sind aber Tangenten der Sectionen derselben durch Ebenen. Man wird also die gegebene Umwälzungsfläche durch zwei durch den gegebenen Punkt gehende Ebenen schneiden und den Sectionen in diesem Punkte Tangenten führen müssen, welches keine Schwierigkeit hat, sobald man zu den schneidenden Ebenen die dem Punkte correspondirende Parallelebene und Meridianebene wählt. Da nämlich die Parallelebene der horizontalen Projectionsebene parallel ist, so ist die horizontale Projection des Parallelkreises ein diesem Kreise gleicher Kreis, dem man also leicht eine Tangente führen kann; und da, wie wir gesehen haben, alle Tangenten der Meridiansectionen, deren Berührungspunkte auf einem Parallelkreise liegen,

Digitized by Google

sich in einem Punkte der Umwälzungsaxe schneiden, so wird, wenn man der ebenen Generatrice in dem diesem Kreise correspondirenden Punkte eine Tangente geführt hat, der Durchschnittspunkt dieser Tangente mit der Axe zur Bestimmung der Tangente der Meridiansection in dem gegebenen Punkte dienen.

Es sei AB die Projectionsaxe; gh die verticale, g′ die horizontale Projection der Umwälzungsaxe; cc′ ef die ebene Generatrice, und C C′ die Trace ihrer Ebene; aa′ der auf der Umwälzungsfläche gegebene Punkt. Tab. VII. Fig. 21.

Durch den Punkt aa′ ist die Parallelebene cc′ gelegt, und der Parallelkreis oder die horizontale Projection desselben CC′ C″C‴ in der horizontalen Projectionsebene aus dem Punkte g′ mit einem Radius gleich der Entfernung der Punkte c oder c′ von der Axe beschrieben. Die horizontale Projection der Tangente dieses Kreises in dem Punkte aa′ ist die Linie i′k′; die verticale Projection ik fällt in die Trace cc′ der Parallelebene.

Die Ebene LML′ ist die durch den Punkt aa′ gehende Meridianebene, und die durch den der ebenen Generatrice und dem Parallelkreise gemeinschaftlichen Punkt c geführte Tangente gc bestimmt vermittelst ihres Durchschnittspunktes g mit der Umwälzungsaxe die Linie ga′ als verticale Projection der Tangente der Meridiansection in dem Punkte aa′; die horizontale Projection dieser Tangente g′a fällt in die horizontale Trace der Meridianebene LML′.

Zwei Durchschnittspunkte beider Tangenten mit den Projectionsebenen k und h′ bestimmen nun die berührende Ebene QPQ′, und eine aus dem Punkte aa′ auf diese Ebene gefällte Perpendiculäre ist die verlangte Normale.

Es sind nur zwei Durchschnittspunkte der Tangenten mit den Projectionsebenen zur Bestimmung der Tracen der Ebene QPQ′ angewendet worden, weil die horizontale Trace einer berührenden Ebene der horizontalen Trace der durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene perpendiculär sein muss und folglich ihrer Richtung nach schon bestimmt ist. Die Durchschnitte der durch den Berührungspunkt gehenden Parallelebene mit der correspondirenden Meridianebene und der berührenden Ebene sind nämlich einander perpendiculär, daher findet dieselbe Lage für die Durchschnitte der beiden letztern Ebenen mit jeder jener Parallelebene parallelen Ebene, und also auch mit der horizontalen Projectionsebene, statt.

IX. Aufgabe.

Einer gegebenen Umwälzungsfläche einer gegebenen Linie parallel einen umhüllenden Cylinder, oder aus einem gegebenen Punkte einen umhüllenden Kegel zu führen.

In beiden Fällen wird die Berührungscurve, als Directrice der umhüllenden Flächen, zunächst

Digitized by Google

zu suchen sein. Zur Construction derselben kann man sich für den Cylinder folgender Methode bedienen.

In einem beliebig auf der ebenen Generatrice angenommenen Punkte führt man derselben eine Tangente und sieht den durch diesen Punkt gehenden Parallelkreis als die Basis eines geraden Kegels an, dessen Scheitel von dem Durchschnittspunkte der Tangente mit der Umwälzungsaxe gebildet wird. Dieser Kegel wird also die Umwälzungsfläche in einem Parallelkreise berühren, und wenn man demselben der gegebenen Linie parallel eine berührende Ebene führt, so wird sie zugleich die Fläche in einem Punkte des Parallelkreises berühren, welcher der gesuchten Curve angehört, indem eine durch diesen Punkt der gegebenen Linie parallel geführte Linie hierdurch und durch ihre Lage in einer berührenden Ebene eine Generatrice des umhüllenden Cylinders wird.

Man construirt daher die berührende Ebene und den Berührungspunkt (Aufg. IV.), indem man die Ebene des Parallelkreises während der Construction als die horizontale Projectionsebene ansieht, und wiederholt das ganze Verfahren so oft, als man zur Darstellung der Berührungscurve für nöthig erachtet; man erhält jedesmal zwei Punkte derselben, weil sich einem geraden Kegel einer gegebenen Linie parallel zwei berührende Ebenen führen lassen.

Vermittelst der Berührungscurve lässt sich nunmehr die Basis des umhüllenden Cylinders finden (Aufg. I.)

Es sei AB die Projectionsaxe; tu die horizontale, U die verticale Projection der Umwäl-
Tab. VIII. Fig. 22. zungsaxe; $s s^1 s^2 s^3 s^4 s^5$ die ebene Generatrice der gegebenen Umwälzungsfläche; a b, a′ b′ die gegebene gerade Linie.

Wenn einem Kegel einer geraden Linie parallel eine berührende Ebene geführt werden soll, so muss, damit die Aufgabe möglich sei, der Durchschnittspunkt der durch den Scheitel dieser Linie parallel geführten Linie mit der Ebene der Basis ausserhalb der Basis oder auf dieselbe fallen. Damit also die Basis der Hülfskegel nicht ausserhalb der möglichen Gränze der Berührungscurve angenommen werde, ist die erste Parallelebene N M durch einen Punkt o der ebenen Generatrice gelegt, für den die Tangente g q der Linie a′ b′ parallel ist. Der diesem Punkte correspondirende Parallelkreis P P′ O O′ ist nun die Basis eines die gegebene Fläche in diesem Kreise berührenden Kegels, dessen Scheitel in dem Punkte g auf der Axe liegt. Um diesem Kegel unter der erforderlichen Lage berührende Ebenen zu führen, ist der Durchschnittspunkt ω der durch den Punkt g der gegebenen Linie parallelen Linie g o, U ω mit der Ebene N M construirt. Zwei aus diesem Punkte dem Parallelkreise geführte Tangenten sind die horizontalen Tracen der berührenden Ebene in der Ebene N M und bilden durch ihre Berührungspunkte O, O′ die horizontalen Projectionen von zwei Punkten der Berührungscurve, deren verticale Projectionen in o o′ fallen. Da die Ebene $N^4 M^4$ die in Bezug auf die Umwälzungsaxe symmetrische Umwälzungsfläche in einem

Digitized by Google

dem Kreise PP′ OO′ ganz gleichen Kreise schneiden muss, so sieht man, dass vermittelst der Diameter OP, O′P′ wiederum zwei Punkte Pp und P′p′ der Berührungscurve bestimmt werden, ohne dass man für die Section der Ebene M^4 N^4 die Construction zu wiederholen braucht.

Verfährt man auf gleiche Weise für einen andern Punkt s′ der ebenen Generatrice, so werden sich die symmetrisch gelegenen Sectionen der Ebenen N′M′ und N^3 M^4 in dem Kreise S^1 P^2 S^2 O^2 in der horizontalen Projection darstellen; der Punkt t bildet den Scheitel des Kegels, dessen Basis in der Ebene N′M′ liegt; der Punkt v ist der Durchschnittspunkt der durch den Punkt t der gegebenen Linie parallel geführten Linie U v, tv′ mit der Ebene N′M′, und die Punkte O^2o^2, P^4p^4, P^2p^2, O^4o^4 ergeben sich als Punkte der Berührungscurve.

Derjenige Parallelkreis, welcher in der durch die grosse Axe s^3s^4 gehenden Parallelebene N^2 M^2 gelegen ist, kann nicht als die Basis eines die Umwälzungsfläche berührenden Kegels angesehen werden, sondern wird als die Basis eines diese Fläche in demselben berührenden verticalen Cylinders zu betrachten sein. Die Projection dieses Kreises, der Kreis S^4 P^3 S^5 O^3 wird daher von den Tracen der berührenden Ebenen in den Punkten O^3, P^3 berührt, und die Punkte O^3o^3, P^3p^3 sind Punkte der Berührungscurve.

Die durch eine krumme Linie in jeder Projectionsebene vereinigten Projectionen der gefundenen Berührungspunkte bilden nunmehr in der Curve $OO^1O^2O^3O^4$ $PP^1P^2P^3P^4$ die horizontale, und in der Curve $oo^1o^2o^3o^4$ $pp^1p^2p^3p^4$ die verticale Projection der gesuchten Berührungscurve. Die Basis des umhüllenden Cylinders ergiebt sich demzufolge in der Curve II^5 QQ^5. Diejenigen Theile der gefundenen Linien, welche in der horizontalen oder verticalen Ansicht durch die krummen Flächen verdeckt erscheinen würden, sind in Punkten angegeben.

Um einer gegebenen Umwälzungsfläche aus einem gegebenen Punkte einen umhüllenden Kegel zu führen, bedient man sich eines dem angeführten ganz ähnlichen Verfahrens; nur müssen die berührenden Ebenen der verschiedenen Kegel alle durch den gegebenen Punkt geführt werden.

X. Aufgabe.

Durch eine gegebene gerade Linie einer gegebenen Umwälzungsfläche eine berührende Ebene zu führen.

Man führt der gegebenen Umwälzungsfläche der gegebenen Linie parallel einen umhüllenden Cylinder (Aufg. IX.), und durch einen Punkt der gegebenen Linie diesem Cylinder eine berührende Ebene (Aufg. III.). Diese Ebene ist eine berührende Ebene der gegebenen Fläche und enthält die gegebene Linie.

Man könnte auch aus zwei Punkten der gegebenen Linie der Umwälzungsfläche zwei umhüllende Kegel führen, aus dem Punkte, in welchem die Berührungscurven sich schneiden, die Ge-

Digitized by Google

neratrice eines jeden dieser Kegel construiren und durch beide Generatricen eine Ebene legen. Diese Ebene würde gleichfalls eine berührende Ebene der Umwälzungsfläche sein und die gegebene Linie enthalten, indem sie durch zwei Punkte dieser Linie und durch zwei Tangenten in einem Punkte der Fläche geführt ist.

In beiden Constructionen wird es sich jedesmal ausweisen, ob eine oder mehrere Ebenen der Aufgabe Genüge leisten können.

XI. Aufgabe.

Durch einen ausserhalb einer gegebenen Umwälzungsfläche gegebenen Punkt derselben eine Normale zu führen.

Durch den gegebenen Punkt legt man eine Meridianebene und lässt dieselbe sich mit dem Punkte vermittelst einer Bewegung um die Umwälzungsaxe der Ebene der ebenen Generatrice anschliessen. Aus dem Punkte in seiner neuen Lage führt man alsdann der ebenen Generatrice eine Normale und verbindet den Punkt, in welchem diese Normale die Umwälzungsaxe schneidet, mit dem gegebenen Punkte in seiner anfänglichen Lage durch eine gerade Linie. Diese Linie ist die verlangte Normale.

Wir haben gesehen, dass die Normalen der Meridiansectionen einer Umwälzungsfläche zugleich Normalen der Fläche selbst sind. Eine durch den gegebenen Punkt gehende Normale wird also in einer Meridianebene enthalten sein und würde, ohne ihren Durchschnittspunkt mit der Umwälzungsaxe zu verändern, eine Normale der ebenen Generatrice sein, wenn jene Meridianebene mit den in ihr enthaltenen Linien vermittelst der angegebenen Bewegung sich mit der Ebene der ebenen Generatrice vereinigte.

Da der Fuss bei den Normalen auf einem Parallelkreise liegt, so findet man den Fuss der durch den gegebenen Punkt geführten Normale, wenn man den Durchschnittspunkt derselben mit der Parallelebene construirt, welche durch den Fuss der Normale der ebenen Generatrice geht.

XII. Aufgabe.

Einer Umwälzungsfläche einer geraden Linie parallel eine Normale zu führen.

Aus einem Punkte der Umwälzungsaxe führt man der gegebenen Linie eine Parallele und legt durch diese Parallele eine Meridianebene, welche man mit der in ihr enthaltenen Linie vermittelst einer Bewegung um die Axe sich der Ebene der ebenen Generatrice anschliessen lässt. Jener Linie in dieser Lage parallel führt man alsdann der ebenen Generatrice eine Normale, und aus

Digitized by Google

dem Durchschnittspunkte derselben mit der Axe der gegebenen Linie wiederum eine parallele Linie. Diese Linie ist die gesuchte Normale.

Wenn man der ebenen Generatrice mehrere Normalen in der erforderlichen Richtung führen kann, so ist die Aufgabe eben so vieler Auflösungen fähig.

Der Fuss der Normale wird wie in der vorhergehenden Aufgabe construirt.

XIII. Aufgabe.

Einer Umwälzungsfläche einer Ebene parallel eine berührende Ebene zu führen.

Aus einem beliebigen Punkte der Umwälzungsaxe errichtet man der gegebenen Ebene eine Perpendiculäre und führt dieser Perpendiculäre parallel der Umwälzungsfläche eine Normale (Aufg. XII.). Eine durch den Fuss dieser Normale derselben perpendiculär geführte Ebene ist die gesuchte berührende Ebene.

Da nämlich die derselben correspondirende Normale der gegebenen Ebene perpendiculär ist, so müssen beide Ebenen einander parallel sein.

XIV. Aufgabe.

Wenn ein Punkt auf einer der Directricen einer gewundenen Cylinderfläche gegeben ist, die diesem Punkte correspondirende Generatrice zu construiren.

Durch den gegebenen Punkt führt man der Parallelebene parallel eine Ebene und construirt den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der zweiten Directrice. Eine Linie, welche diesen Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte vereinigt, ist die gesuchte Generatrice.

Sie geht durch den gegebenen Punkt, durch die zweite Generatrice und ist der Parallebene parallel.

XV. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer gewundenen Cylinderfläche mit einer der verticalen Projectionsebene parallelen Ebene, oder eine ebene Directrice der Fläche zu construiren.

Durch einen Punkt auf einer der Directricen führt man die correspondirende Generatrice (Aufg. XIV.) und construirt den Durchschnitt derselben mit der gegebenen verticalen Ebene. Dieses Verfahren wiederholt man so oft, als man Punkte des gesuchten Durchschnitts bestim-

Digitized by Google

men will. Alle auf solche Weise gefundenen Punkte bilden, durch eine krumme Linie vereinigt, eine ebene Directrice*).

XVI. Aufgabe.

Die transversale Generatrice zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt auf einer gewundenen Ebene geht.

Man construirt die in der Parallelebene liegende Generatrice und führt durch den gegebenen Punkt eine den Directricen parallele Ebene. Alsdann construirt man den Durchschnitt dieser Ebene mit der Parallelebene, so wie den Durchschnittspunkt dieses Durchschnitts mit jener in der Parallelebene enthaltenen Generatrice und vereinigt diesen Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine gerade Linie. Diese Linie ist die gesuchte transversale Generatrice.

Sie hat zwei Punkte mit der Fläche gemeinschaftlich und liegt in einer den Directricen parallelen Ebene.

Man kann zu der angeführten Construction statt der Parallelebene jede andere derselben parallele Ebene gebrauchen.

XVII. Aufgabe.

Einer gewundenen Ebene in einem auf derselben gegebenen Punkte eine berührende Ebene zu führen.

Man construirt die durch den gegebenen Punkt gehende Generatrice (Aufg. XIV.), desgleichen die durch denselben Punkt gehende transversale Generatrice (Aufg. XVI.) und legt durch beide Linien eine Ebene. Diese Ebene ist die berührende Ebene. Sie geht nämlich in dem gegebenen Punkte durch zwei Linien, welche, in der Fläche enthalten, als Tangenten derselben anzusehen sind.

Tab. IX. Fig. 24. Es sei GH die Projectionsaxe; dd^4 die eine, bb^4 die andere Directrice einer gewundenen

*) In den folgenden Aufgaben setzt man voraus, dass eine gewundene Cylinderfläche jedesmal durch zwei ebene Directricen und eine der horizontalen Projectionsebene perpendiculäre Parallelebene gegeben sei. Man kann nämlich der Parallelebene in den meisten Fällen diese Lage durch eine zweckmässige Transformation der Projectionsebenen (Erst. Abschn. Aufg. XXII.) geben. Dasselbe gilt für die gewundenen Ebenen; wobei zugleich angenommen ist, dass die verticale Projectionsebene den Directricen derselben parallel sei, damit die ebenen Directricen gerade Linien sein können.

Digitized by Google

Cylinderfläche; $A''a''$ ein auf derselben gelegener Punkt, durch welchen die berührende Ebene geführt werden soll; CDE die Parallelebene. Die Ebenen der Directricen sind die verticale Projectionsebene und eine derselben parallele Ebene, deren horizontale Trace in CC^4 fällt. Die horizontalen Projectionen der Directricen fallen in die Projectionsaxe und in die Trace CC^4.

Die verticale Projection der der Parallelebene angehörigen Generatrice ergiebt sich in bd; die horizontale Projection fällt in die Trace CD, und der Durchschnittspunkt einer durch $A''a''$ den Directricen parallel geführten Ebene mit dieser Generatrice findet sich in Aa. Die durch die Punkte Aa, $A''a''$ geführte gerade Linie AA^4, aa^4 ist demnach die transversale Generatrice, welche in Verbindung mit der, vermittelst der Ebene $C''D''E^2$ construirten, Generatrice $b''d^2$, deren horizontale Projection in die Trace $C''D''$ fällt, zur Bestimmung der berührenden Ebene gebraucht werden könnte. In der vorliegenden Figur aber, welche einen von den Ebenen der Directricen und zwei parallelen Ebenen CDE und $C^4D^4E^4$ eingeschlossenen Theil einer gewundenen Ebene darstellt, dient hierzu die durch den Punkt Aa der durch den Punkt $a''A''$ gehenden Generatrice parallel geführte Linie ee, CD, welche der Durchschnitt der berührenden Ebene mit der Ebene CDE ist, weil die Durchschnitte einer Ebene durch einander parallele Ebenen parallele Linien sind. Es ergeben sich also die Durchschnitte der die Fläche in dem Punkte $a''A''$ berührenden Ebene mit den die Fläche einschliessenden Ebenen in den Linien ee^4, ce^4, ce, c^4e^4, und die Richtung der horizontalen Trace in IK; die horizontalen Projectionen dieser Durchschnitte fallen in die horizontalen Tracen der einschliessenden Ebenen.

Um die Gestalt der gewundenen Ebene anschaulich zu machen, sind die Durchschnitte derselben und die ihrer berührenden Ebene durch mehrere der Parallelebene parallelen Ebenen construirt. Die den verticalen Projectionen bd, $b'd'$, $b''d^2$, b^3d^3, b^4d^4 der Generatricen der Fläche correspondirenden verticalen Projectionen jener Durchschnitte der berührenden Ebene sind demnach die Linien ee, $e'e'$, $b''d^2$, e^3e^3, e^4e^4. Die horizontalen Projectionen sowohl der Generatricen, als der Durchschnitte der berührenden Ebene fallen in die horizontalen Tracen der schneidenden Ebenen. Die Punkte Aa, $A'a'$, $A''a''$, A^3a^3, A^4a^4 sind, als der transversalen Generatrice angehörig, alle in gerader Linie, wodurch die Construction verificirt werden kann.

XVIII. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche in einem auf derselben gegebenen Punkte eine berührende Ebene und Normale zu führen.

Durch den gegebenen Punkt führt man die correspondirende Generatrice (Aufg. XIV), und den ebenen Directricen in den Durchschnittspunkten mit dieser Generatrice Tangenten, welche

Digitized by Google

man als Directricen einer gewundenen Ebene von gleicher Parallelebene mit der gewundenen Cylinderfläche ansieht. Diese gewundene Ebene wird daher letztere in der durch den gegebenen Punkt gehenden und beiden Flächen gemeinschaftlichen Generatrice berühren, und man braucht daher nur in diesem Punkte der gewundenen Ebene eine berührende Ebene zu führen (Aufg. XVII.), um in dieser Ebene zugleich die berührende Ebene der gewundenen Cylinderfläche zu finden.

Die Normale ist eine dieser Ebene in dem gegebenen Punkte errichtete Perpendiculäre.

XIX. Aufgabe.

Den Berührungspunkt einer Ebene mit einer gewundenen Cylinderfläche zu finden, wenn die Ebene durch eine Generatrice der Fläche geht.

Es kommt bei dieser Aufgabe darauf an, eine gerade Linie zu finden, welche in der gegebenen Ebene enthalten sei und zugleich die vorgelegte Fläche berühre, denn der Durchschnittspunkt einer solchen Linie mit der gegebenen Generatrice wird alsdann der gesuchte Berührungspunkt sein.

Man construirt also den Durchschnitt der gegebenen Ebene und den Durchschnitt der die gewundene Cylinderfläche in der gegebenen Generatrice berührenden gewundenen Ebene (Aufg. XVIII.) mit der Parallelebene und führt aus dem Durchschnittspunkte dieser beiden Durchschnitte die transversale Generatrice der gewundenen Ebene (Aufg. XVI.)

Diese Linie besitzt die erforderlichen Eigenschaften und liefert folglich durch ihren Durchschnittspunkt mit der gegebenen Generatrice den gesuchten Berührungspunkt.

Tab. X. Fig. 25. Es sei AB die Projectionsaxe; CDE die eine, FGH die andere ebene Directrice einer gewundenen Cylinderfläche; LML′ eine Ebene, welche dieselbe in der Generatrice DI, di schneidet; TST′ die Parallelebene. Die Ebene der ebenen Directrice CDE sei die verticale Projectionsebene; die der ebenen Directrice FGH eine Ebene, deren horizontale Trace die Linie IK bildet.

Die verticale Projection des Durchschnitts der Ebene LML′ mit der Parallelebene erscheint in der Linie UV; die horizontale Projection desselben fällt in die horizontale Trace TS. Die Tangenten DP und GQ der ebenen Directricen in den Punkten D und G bestimmen, als Directricen der berührenden gewundenen Ebene, durch ihre Durchschnittspunkte mit der Parallelebene den Durchschnitt der gewundenen Ebene mit derselben. Der Durchschnittspunkt der Tangente DP fällt in die verticale Trace ST′, in den Punkt P; der Durchschnittspunkt der Tangente GQ, in dem Durchschnitte r′, Rr der Ebene IK mit der Parallelebene, aber unterhalb der horizontalen Projectionsebene in den Punkt Q; die Linie PQ ist also die verticale Projection des Durch-

Digitized by Google

schnitts der gewundenen Ebene mit der Parallelebene, dessen horizontale Projection in die Trace S T fällt. Der Punkt W W′ ist demnach der gesuchte, einer Generatrice der gewundenen berührenden Ebene und der Ebene L M L′, ausserhalb der Generatrice D I, d i, angehörige Punkt.

Die den Directricen parallel durch diesen Punkt geführte Ebene N O bestimmt nunmehr vermittelst ihres Durchschnittspunktes p p′ mit der Generatrice D I, d i die Linie o p, o′ p′, welche zugleich eine transversale Generatrice der berührenden gewundenen Ebene ist und der Ebene L M L′ angehört. Der Punkt p p′ ist also der gesuchte Berührungspunkt dieser Ebene mit der gegebenen gewundenen Cylinderfläche.

Man sieht, dass, wenn richtig operirt wird, die verticale Projection der transversalen Generatrice der verticalen Trace der schneidenden Ebene parallel sein muss.

XX. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche durch eine gerade Linie ausserhalb derselben eine berührende Ebene zu führen.

Diese Aufgabe wird ohne Schwierigkeit gelöst werden können, sobald man den Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie mit der gewundenen Cylinderfläche construirt hat; eine durch die diesem Punkte correspondirende Generatrice und die gegebene Linie geführte Ebene wird nämlich die verlangte berührende Ebene sein.

Man construirt daher die Durchschnittscurve einer durch die gegebene Linie gelegten Ebene mit der gewundenen Cylinderfläche und den Punkt, in welchem sich die Curve und die gerade Linie, als in einer Ebene gelegen, begegnen. Dieses ist der gesuchte Durchschnittspunkt jener Linie mit der gewundenen Cylinderfläche. Ferner construirt man die diesem Punkte correspondirende Generatrice und führt durch diese Generatrice und die gegebene Linie eine Ebene, deren Berührungspunkt nach der vorhergehenden Aufgabe gefunden werden kann.

Die Durchschnittscurve wird von den Durchschnittspunkten der Generatricen der Fläche mit der schneidenden Ebene gebildet, welche man, um die Construction zu vereinfachen, vertical annehmen kann.

Es sei A B die Projectionsaxe; C′ P E F die eine, G Q H I die andere ebene Directrice einer gewundenen Cylinderfläche; C D E die Parallelebene; a b, a′ b′ die gerade Linie. Die Ebene der ebenen Directrice C′ P E F sei die verticale Projectionsebene; die der andern Directrice die Ebene g i. Die Fläche ist durch die Ebenen der ebenen Directricen, die Parallelebene und eine derselben parallele Ebene $C^{s}\,D'''\,C^{s}$ als eingeschlossen betrachtet; die Durchschnitte der beiden letztern Ebenen mit der Fläche sind die Linien C′ G und F I. Tab. X. Fig. 26.

Digitized by Google

Der Durchschnitt einer durch a b, a′ b′ gelegten verticalen Ebene mit der gewundenen Cylinderfläche stellt sich in der verticalen Projection in der krummen Linie K L M O dar; die horizontale Projection fällt in a′ b′. Es ergeben sich demnach zwei Punkte M m, L l als Durchschnittspunkte der Linie a b, a′ b′ mit der Fläche, woraus man schliesst, dass in diesem Falle zwei berührende Ebenen durch die Linie a b, a′ b′ geführt werden können. Eine derselben Y X Y′, welche durch die dem Punkte M m correspondirende Generatrice P R, p r geht, ist vermittelst der Durchschnittspunkte P, b′, r der Generatrice und der Linie a b, a′ b′ mit den Projectionsebenen construirt. Die der Parallelebene parallele Ebene C″ D′ C‴ dient zur Construction jener Generatrice.

Um den Berührungspunkt der berührenden Ebene Y X Y′ zu finden, ist nach der vorhergehenden Aufgabe verfahren, und es ergiebt sich derselbe in y y′. Es sind nämlich die Directricen der die vorgelegte Fläche in der Generatrice P R, p r berührenden gewundenen Ebene die Linien U V und S T; die Durchschnitte der gewundenen Ebene mit zwei Parallelebenen sind vertical in U S und V T projicirt, so wie die verticalen Projectionen der Durchschnitte der Ebene Y X Y′ mit denselben Ebenen in c g und f h fallen; die Linie W Z, w z ist also die erforderliche transversale Generatrice.

Die vorliegende Figur stellt nun die Durchschnitte einer gewundenen Cylinderfläche, mit vier sie einschliessenden Ebenen, die Tracen und den Berührungspunkt einer durch die Linie a b, a′ b′ gehenden berührenden Ebene und endlich die Durchschnitte dieser Ebene mit den einschliessenden Ebenen dar. Diejenigen Theile dieser Linien, welche in der verticalen oder horizontalen Ansicht von der krummen Fläche oder den erwähnten Ebenen als verdeckt erscheinen würden, sind in Punkten angegeben.

XXI. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche einer geraden Linie parallel einen umhüllenden Cylinder, oder aus einem Punkte einen umhüllenden Kegel zu führen.

Um der Fläche einen umhüllenden Cylinder zu führen, wählt man eine beliebige Generatrice, legt durch dieselbe der gegebenen Linie parallel eine Ebene und construirt den Berührungspunkt dieser Ebene (Aufg. XIX.). Dieses ist ein Punkt der Berührungscurve, und eine durch denselben der gegebenen Linie parallel geführte Linie ist eine Generatrice des umhüllenden Cylinders.

Sie ist nämlich zufolge der Construction eine der gegebenen Linie parallele Tangente der vorgelegten Fläche.

Digitized by Google

Man wiederholt dieses Verfahren so oft, als man Punkte der Berührungscurve oder Generatricen des umhüllenden Cylinders finden will.

Für den umhüllenden Kegel wird die Construction nur insofern modificirt, als die berührenden Ebenen, und folglich auch die Generatricen des Kegels, durch den gegebenen Punkt geführt werden müssen.

XXII. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche durch einen Punkt ausserhalb derselben eine Normale zu führen.

Eine Linie, welche zweien Tangenten der vorgelegten Fläche perpendiculär wäre und durch den gegebenen Punkt ginge, würde die verlangte Normale sein. Zwei Tangenten in einem Punkte der Fläche sind aber die dem Punkte correspondirende Generatrice und die durch diesen Punkt gehende transversale Generatrice der in jener Generatrice die Fläche berührenden gewundenen Ebene.

Man construirt also die krumme Linie, welche von den Durchschnittspunkten aus dem gegebenen Punkte auf die Generatricen der Fläche gefällter Perpendiculären mit diesen Generatricen gebildet wird.

Man construirt ferner die diesen Durchschnittspunkten correspondirenden transversalen Generatricen der die Fläche in jenen Generatricen berührenden gewundenen Ebenen und die krumme Linie, welche von den Durchschnittspunkten der auf diese transversalen Generatricen aus dem gegebenen Punkte gefällten Perpendiculären mit denselben gebildet wird.

Der Punkt, in welchem sich beide krumme Linien schneiden, ist der Fuss der verlangten Normale; denn eine durch denselben und den gegebenen Punkt geführte gerade Linie ist zugleich zweien Tangenten der Fläche perpendiculär.

Wenn sich die krummen Linien in mehreren Punkten schneiden, so lassen sich auch mehrere Normalen durch den gegebenen Punkt führen.

XXIII. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche einer Ebene parallel eine berührende Ebene zu führen.

Zwei Linien, welche die vorgelegte Fläche in einem Punkte berühren, und von denen jede einer Linie in der gegebenen Ebene parallel ist, werden die berührende Ebene bestimmen.

Man nimmt daher zwei gerade Linien in der gegebenen Ebene an und führt jeder dieser Li-

Digitized by Google

nien parallel der gewundenen Cylinderfläche einen umhüllenden Cylinder (Aufg. XXI.). Der Punkt, in welchem sich die beiden Berührungscurven schneiden, ist der Berührungspunkt der berührenden Ebene, und eine durch die aus diesem Punkte geführten Generatricen der umhüllenden Cylinder gelegte Ebene ist die verlangte berührende Ebene.

Sobald sich die Berührungscurven in mehreren Punkten schneiden, so können der gegebenen Ebene parallel auch mehrere berührende Ebenen geführt werden.

In der Praxis nimmt man mit Vortheil die beiden Tracen der gegebenen Ebene als die Linien an, denen die umhüllenden Cylinder parallel geführt werden.

XXIV. Aufgabe.

Einer gewundenen Cylinderfläche einer gegebenen Linie parallel eine Normale zu führen.

Der gegebenen Linie führt man eine Ebene perpendiculär, und dieser Ebene parallel eine berührende Ebene der Fläche (Aufg. XXIII.). Die Normale dieser Ebene ist die verlangte Normale.

Sie ist einer Ebene perpendiculär, welche der gegebenen Linie perpendiculär ist, folglich dieser Linie parallel.

XXV. Aufgabe.

Einer Umwälzungs- oder gewundenen Cylinderfläche eine berührende Ebene zu führen, welche zugleich eine Cylinder- oder Kegelfläche berühre.

Man führt den Generatricen der Cylinderfläche parallel oder aus dem Scheitel der Kegelfläche einen umhüllenden Cylinder oder umhüllenden Kegel der andern Fläche und construirt die Basis desselben. Alsdann führt man dieser Basis und der Basis der Cylinder- oder Kegelfläche eine gemeinschaftliche Tangente. Diese Tangente ist die horizontale Trace der gemeinschaftlichen berührenden Ebene, deren verticale Trace vermittelst einer aus einem der Berührungspunkte der Basen geführten Generatrice construirt werden kann.

Diese Ebene ist durch zwei Tangenten jeder der vorgelegten Flächen gelegt.

Digitized by Google

XXVI. Aufgabe.

Eine Fläche zu construiren, welche durch die Bewegung einer geraden Linie längs dreier Linien hervorgebracht wird.

Wenn die drei Linien oder Directricen gerade Linien sind, so führt man, um eine beliebige Generatrice zu construiren durch einen beliebigen Punkt auf einer der Directricen, durch jede der andern Directricen eine Ebene und construirt den Durchschnitt dieser Ebenen. Dieser Durchschnitt ist eine Generatrice der Fläche, denn er ist eine gerade Linie, welche alle drei Directricen schneidet.

Sind die Directricen krumme Linien, so nimmt man, um eine Generatrice zu construiren, einen Punkt auf einer der Directricen als gemeinschaftlichen Scheitel zweier Kegelflächen an, deren Directricen von den beiden andern Directricen der vorgelegten Fläche gebildet werden, und construirt die Basen dieser Kegelflächen. Aus dem Punkte, in welchem diese Basen sich schneiden, führt man alsdann die beiden Kegelflächen gemeinschaftliche Generatrice, welche als eine durch alle drei Directricen der zu construirenden Fläche gehende Gerade eine Generatrice dieser Fläche sein wird.

In beiden Fällen wiederholt man das Verfahren so oft, als man Generatricen der Fläche finden will.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Von Durchschnitten krummer Flächen.

Sobald zwei Flächen vollkommen bestimmt, oder auf solche Weise gegeben sind, dass man dieselben in allen ihren Theilen construiren kann, so ist es immer möglich, diejenigen Punkte beider Flächen zu finden, welche den nämlichen Ort im Raume einnehmen, oder beiden Flächen zugleich angehören. Diese Punkte bilden in ihrer Reihenfolge den *Durchschnitt* der Flächen, der im Allgemeinen, als von der Krümmung beider Flächen abhängig, eine krumme Linie von gedoppelter Krümmung ist, in besondern Fällen aber zur ebenen Curve, zu geraden Linien und selbst zu einem Punkte werden kann.

Jeder einem solchen Durchschnitte angehörige Punkt wird den Durchschnittspunkt zweier Linien mit einander abgeben, von denen jede auf einer der Flächen befindlich ist. Man wird also, um einen Punkt jenes Durchschnitts zu construiren, zwei Linien construiren müssen, welche unter der angegebenen Lage sich schneiden können.

Dieses ist der Fall mit den Durchschnittslinien beider Flächen durch eine dritte Fläche, also auch durch eine Ebene, und die allgemeine Methode, einen Punkt des Durchschnitts zweier Flächen zu finden, besteht daher in der Construction der Sectionen beider Flächen durch eine Ebene, indem sich hierdurch jener Punkt in dem Durchschnittspunkte dieser Sectionen mit einander ergiebt, wenn ein solcher überhaupt vorhanden ist.

Obgleich nach dem Vorhergehenden sich die Sectionen zweier zu den von uns betrachteten Classen gehörigen Flächen durch eine Ebene immer construiren lassen, so wird es dennoch in Folge der Generation der Flächen für die schneidende Ebene eine gewisse Lage geben, gemäss welcher die Sectionen unter den obwaltenden Umständen die möglichst einfache und am leichtesten darzustellende Gestalt gewinnen, wodurch also die allgemeine Methode der Construction eines Durchschnittspunktes den möglichst einfachen und zur Anwendung geschicktesten Charakter erhält.

Digitized by Google

Dieser Abschnitt enthält nun in einer Reihe von Aufgaben die Anwendung jener Methode auf die von uns bisher behandelten Flächen, so wie einige die krummen Linien betreffende Probleme. Die krummen Linien im Raume betrachtet, können nämlich im Allgemeinen als Durchschnitte zweier Flächen angesehen werden; denn auf welchem Wege man auch zur Kenntniss der Projectionen einer krummen Linie gelangt sei, so bilden die projicirenden Linien immer zwei Cylinderflächen, deren Basen diese Projectionen sind, und deren gegenseitiger Durchschnitt die krumme Linie selbst sein muss.

I. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer geraden Linie zu construiren.

Wenn man den Generatricen der Cylinderfläche parallel durch die gegebene Linie eine Ebene führt, so wird diese Ebene, falls überhaupt ein Durchschnitt stattfindet, die Fläche nach zwei Generatricen schneiden, deren Durchschnittspunkte mit der gegebenen Linie den verlangten Durchschnitt bilden.

Man construirt daher die horizontale Trace jener Ebene und die den Durchschnittspunkten dieser Trace mit der Basis der Cylinderfläche correspondirenden Generatricen. Diese Generatricen werden von der gegebenen Linie in den gesuchten Punkten geschnitten.

Für eine Kegelfläche wird das Verfahren insofern modificirt, als die schneidende Ebene durch die gegebene Linie und den Scheitel des Kegels geführt werden muss.

II. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer Ebene und die wahre Gestalt dieses Durchschnitts in der schneidenden Ebene zu construiren.

Man schneidet die Cylinderfläche durch eine Reihe den Generatricen paralleler und verticaler Ebenen und construirt die Durchschnitte derselben mit der gegebenen Ebene. Jeder dieser Durchschnitte wird von den in einer schneidenden Hülfsebene mit ihm liegenden geradlinigen Durchschnitten der Cylinderfläche in Punkten getroffen, welche dem verlangten Durchschnitte angehören; denn die Durchschnitte der Hülfsebenen mit der Cylinderfläche sind Generatricen, und die Hülfsebenen sind die horizontal projicirenden Ebenen derselben.

Die Projectionen aller auf diese Weise gefundenen Durchschnittspunkte bilden nun, durch krumme Linien vereinigt, die Projectionen des verlangten Durchschnitts, dessen wahre Gestalt sich ergiebt, wenn man die schneidende Ebene mit den in ihr enthaltenen Durchschnittspunkten auf eine der Projectionsebenen herabschlägt. (Erster Abschn. Aufg. X.)

Digitized by Google

Für eine Kegelfläche verfährt man auf gleiche Weise, nur dass die schneidenden Hülfsebenen durch den Scheitel geführt werden müssen. In beiden Fällen sind, wie man sieht, die horizontalen Tracen dieser Ebenen die horizontalen Projectionen der Generatricen.

Es sei AB die Projectionsaxe; $DD'D''D^3$ die kreisförmige Basis, Cc der Scheitel eines ge-
Tab. XI. Fig. 27. raden Kegels; GHG' eine denselben schneidende Ebene.

Der Durchschnitt einer, durch den Gipfel und der verticalen Projectionsebene parallel geführten, schneidenden Hülfsebene DD^3 mit der Ebene GHG' ergiebt sich in $iE^3, i'e^3$, und die in jener Ebene enthaltenen Generatricen DC, de; D^3C, d^3e schneiden diesen Durchschnitt in den Punkten E e, E^3e^3. Auf gleiche Weise ergeben sich vermittelst anderer Hülfsebenen, wie z. B. DD'', die Durchschnittspunkte E' e', E'' e'' und andere.

Die Projectionen des Durchschnitts der Ebene GHG' mit der Kegelfläche sind demnach die die Projectionen jener Punkte verbindenden krummen Linien $DE'E''E^3$ und $ee'e''e^3$.

Wird die schneidende Ebene um ihre horizontale Trace mit dem in ihr enthaltenen Durchschnitte auf die horizontale Projectionsebene herabgeschlagen, so ergiebt sich die wahre Gestalt dieses Durchschnitts in der Curve OLPM, welche, wie man weiss, eine Ellipse sein muss.

III. Aufgabe.

Die Entwickelung eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis, und die Gestalt einer auf dem Kegel befindlichen krummen Linie in der entwickelten Kegelfläche zu construiren.

Da sich alle Punkte einer kreisförmigen Basis eines geraden Kegels in gleicher Entfernung vom Scheitel befinden, und diese Entfernung während der Entwickelung keine Veränderung erleiden kann, so wird sich die Basis einer solchen entwickelten Kegelfläche auf einem Kreisbogen befinden, der mit einem Radius, gleich der Entfernung eines Punktes der Basis vom Scheitel, beschrieben ist.

Man beschreibt also mit dem angegebenen Radius einen Kreisbogen und trägt auf denselben die Länge des Umkreises der Basis; die Halbmesser, welche den Endpunkten der entwickelten Basis correspondiren, bestimmen die geradlinigen Gränzen der entwickelten Fläche.

Die Generatricen des Kegels sind nun Halbmesser dieses, so wie aller innerhalb dieser Gränzen aus demselben Mittelpunkte beschriebenen Kreisbogen, oder es findet sich für jede Generatrice eine ihr analog gelegene Linie in der entwickelten Fläche. Man kann daher in derselben die Lage auf den Generatricen befindlicher Punkte, oder die Gestalt einer auf der Kegelfläche befindlichen krummen Linie construiren, wenn man die bekannte Entfernung solcher Punkte vom Scheitel auf die jeder der Generatricen correspondirenden Halbmesser, vom Mittelpunkte aus, trägt und die hierdurch bestimmten Punkte durch eine krumme Linie mit einander vereinigt.

Digitized by Google

Es sei $DD'D''D^3$ die Basis, und Cc der Scheitel eines geraden Kegels, welcher zugleich mit einer Section $EE'E''E^3$, $ee'e''e^3$ entwickelt werden soll. Tab. XI. Fig. 27.

Aus einem Punkte C (Fig. 28) ist, unter der Voraussetzung, dass die Entwickelung bei der Generatrice CD, cd (Fig. 27) ihren Anfang nehme, ein Kreisbogen mit der wahren Länge CD (Fig. 28) einer Generatrice, von der Basis bis zum Scheitel gerechnet, als Radius beschrieben, und auf denselben die ganze Länge der Basis von D aus, als Summe der Länge der den verschiedenen Generatricen, wie CD'', cd'; CD^3, cd^3 u. s. w., correspondirenden Bogentheile der Basis (Fig. 27), getragen. Hierdurch ergiebt sich die Lage der den Generatricen CD, cd; CD'', cd''; CD^3, cd^3 (Fig. 27) correspondirenden Halbmesser CD, CD'', CD^3 u. s. w. (Fig. 28), und die der Punkte $EE''E^3$ u. s. w., wenn die wahre Entfernung der Punkte Ee', $E''e''$, E^3e^3 (Fig. 27) von dem Scheitel Cc construirt und auf diese Halbmesser von C aus (Fig. 28) getragen wird. Eine diese Punkte verbindende Curve $EE''E^3$ u. s. w. ist also die Section $EE'E''E^3$, $ee'e''e$ (Fig. 27) in der entwickelten Kegelfläche.

IV. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Umwälzungsfläche mit einer Ebene zu construiren.

Man construirt die Durchschnitte der gegebenen Ebene mit einer Reihe von Parallelebenen der Umwälzungsfläche. Die Punkte, in welchen die gleichfalls construirten Parallelkreise von diesen Durchschnitten getroffen werden, sind Punkte des gesuchten Durchschnitts der gegebenen Ebene und der Umwälzungsfläche *).

V. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer geraden Linie mit einer Umwälzungsfläche zu construiren.

Man construirt den Durchschnitt einer durch die Linie gelegten Ebene mit der Umwälzungsfläche (Aufg. IV.) und alsdann den Durchschnitt der Linie mit diesem Durchschnitte.

---

*) Man kann sich dieser Construction mit Vortheil bedienen, um die Berührungscurve eines umhüllenden Kegels oder Cylinders zu finden, wenn die umhüllte Umwälzungsfläche zu den Flächen vom zweiten algebraischen Grade gehört. Es kann nämlich mit Hülfe der Analysis bewiesen werden, dass in diesem Falle die Berührungscurve eine ebene Curve sei. Wenn man also nach der gewöhnlichen Methode drei Punkte bestimmt hat, so ergeben sich die übrigen Punkte der Berührungscurve durch den Durchschnitt einer durch jene Punkte gelegten Ebene mit der Fläche.

Digitized by Google

VI. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Ebene mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren.

Man construirt die Durchschnitte der Generatricen der gewundenen Cylinderfläche mit der Ebene. Diese Durchschnitte bilden den verlangten Durchschnitt.

VII. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer geraden Linie mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren.

Man construirt den Durchschnitt der Fläche mit der horizontal projicirenden Ebene der Linie (Aufg. VI.) und alsdann den Durchschnitt der Linie mit diesem Durchschnitte.

VIII. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Cylinderflächen zu construiren.

Man construirt die horizontale Trace einer den Generatricen beider Flächen parallelen Ebene und führt dieser Trace parallel eine beliebige Anzahl die Basen beider Flächen zugleich schneidender Linien.

Die den Durchschnittspunkten einer solchen Linie mit den Basen correspondirenden Generatricen schneiden einander, und ihre Durchschnittspunkte gehören dem gesuchten Durchschnitte an.

Man construirt also für jede die Base schneidende Linie jene Generatricen und ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte. Diese Punkte bilden, durch eine krumme Linie vereinigt, den gesuchten Durchschnitt.

Durch eine Reihe den Generatricen beider Flächen paralleler Ebenen würden nämlich die Flächen nach ihren Generatricen geschnitten werden, sobald die horizontalen Tracen der Ebenen die Basen der Flächen treffen, indem eine gerade Linie, welche geraden Linien parallel ist, die es wiederum einer Ebene sind, ganz in dieser Ebene enthalten sein muss, wenn sie einen Punkt mit derselben gemeinschaftlich hat. Jene die Basen schneidenden Linien sind also die horizontalen Tracen solcher Ebenen, und die den Durchschnittspunkten derselben mit der Basis correspondirenden Generatricen müssen, als in einer Ebene gelegen, einander schneiden.

Digitized by Google

IX. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Kegelfläche zu construiren.

Wenn die horizontale Trace einer durch den Scheitel der Kegelfläche den Generatricen der Cylinderfläche parallel geführten Ebene die Basen beider Flächen schneidet, so werden die Flächen selbst nach Generatricen durch diese Ebene geschnitten werden, welche, als in einer Ebene gelegen, sich schneiden, und deren Durchschnittspunkte dem gesuchten Durchschnitte angehören.

Man construirt also die horizontalen Tracen einer beliebigen Anzahl solcher Ebenen von der erforderlichen Lage, die jeder Ebene correspondirenden Generatricen und die Durchschnittspunkte dieser Generatricen mit einander. Diese Punkte bestimmen in gehöriger Anzahl den verlangten Durchschnitt.

X. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Kegelflächen zu construiren.

Zwei Kegelflächen können durch eine Ebene nach geraden Linien oder Generatricen geschnitten werden, wenn die Ebene durch den Scheitel beider Flächen und durch die Basen derselben geführt ist.

Um also den Durchschnitt der Flächen zu finden, construirt man die Tracen solcher Ebenen, die diesen Tracen correspondirenden Generatricen und die gegenseitigen Durchschnittspunkte dieser Generatricen. Diese Punkte gehören dem gesuchten Durchschnitte an.

Es sei AB die Projectionsaxe; Cc der Scheitel, $DD'D''D^3$ die Basis der einen, Ee der Scheitel, $FF'F''F^3$ die Basis der andern Kegelfläche. Beide Basen sind Ellipsen. Tab. XII. Fig. 29.

Um die horizontalen Tracen der schneidenden Ebenen zu bestimmen, ist der Durchschnittspunkt G einer durch beide Scheitel gehenden Linie CG, cg mit der horizontalen Projectionsebene construirt, denn alle durch diesen Punkt und beide Basen geführten Linien können Tracen solcher Ebenen sein.

Eine dieser Tracen GF'' schneidet nun die Basis des einen Kegels in den Punkten F', F'', die des andern in den Punkten D, D', und die diesen Punkten correspondirenden Generatricen $F'E$, $f'e$; $F''E$, fe und DC, de; D'C, d'c schneiden sich ihrerseits in den Punkten Ee, E'e', E''e, welche also dem Durchschnitte der Flächen angehören.

Werden auf diese Weise die Durchschnittspunkte mehrerer Generatricen construirt, so ergiebt sich als horizontale Projection des Durchschnitts der Flächen oberhalb der horizontalen Projectionsebene die Curve $E^3E^1E^2E^5E^4$, und als verticale Projection die Curve $e^3e^1e^2e^5e^4$. Die-

Digitized by Google

jenigen Theile der gegebenen und construirten Linien, welche in horizontaler oder verticaler Ansicht von den Flächen verdeckt erscheinen würden, sind punktirt.

XI. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer Umwälzungsfläche zu construiren.

Um den Durchschnitt mit der Cylinderfläche zu construiren, betrachtet man eine beliebige Anzahl von Parallelkreisen der Umwälzungsfläche als Directricen den Generatricen der Cylinderfläche paralleler Cylinderflächen und construirt die Basen derselben, welche den Directricen gleiche Kreise sein werden. Aus den Punkten, in welchen diese Basen die Basis der gegebenen Fläche schneiden, führt man alsdann die diesen Punkten correspondirenden Generatricen der Hülfsflächen und construirt den Durchschnittspunkt jeder Generatrice mit der ihr correspondirenden Directrice. Diese Durchschnittspunkte sind Punkte des gesuchten Durchschnitts.

Die auf die angegebene Weise geführten Generatricen der Hülfsflächen sind nämlich zugleich Generatricen der gegebenen Cylinderfläche.

Für eine Kegelfläche wird das Verfahren insofern modificirt, als die Hülfsflächen Kegelflächen von gleichem Scheitel mit der gegebenen Fläche sind. Die Basen dieser Kegelflächen sind gleichfalls Kreise.

XII. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Cylinder- oder Kegelfläche mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren.

Man construirt den Durchschnitt der Generatricen der gewundenen Cylinderfläche mit der Cylinder- oder Kegelfläche (Aufg. I.).

XIII. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Umwälzungsflächen zu construiren.

a) *Wenn die Axen beider Flächen einander parallel sind.*

Man schneidet die Flächen durch eine Reihe von Parallelebenen und construirt die diesen Ebenen correspondirenden Parallelkreise. Die in einer Ebene liegenden Parallelkreise schneiden sich in Punkten, welche dem verlangten Durchschnitte angehören.

b) *Wenn die Axen der Flächen einander nicht parallel sind, jedoch in einer Ebene liegen.*

In diesem Falle wird man den Projectionsebenen eine solche Lage geben müssen, dass die ho-

Digitized by Google

rizontale einer der Axen perpendiculär, und die verticale beiden Axen parallel sei. Alsdann kann man den Durchschnittspunkt beider Axen mit einander als den Mittelpunkt einer Reihe concentrischer Kugelflächen ansehen, von denen jede beide Flächen schneidet. Der Durchschnitt einer jeden Fläche wird ein Parallelkreis derselben sein, und die Durchschnittspunkte zweier auf einer Kugelfläche liegenden Parallelkreise werden dem gesuchten Durchschnitte der Umwälzungsflächen angehören.

Die Construction ist keiner Schwierigkeit unterworfen. Man beschreibt nämlich aus der verticalen Projection des Durchschnittspunktes der Axen mit einander den in der Ebene der ebenen Generatrice liegenden grössten Kreis der jedesmaligen schneidenden Kugelfläche. Die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit den ebenen Generatricen bestimmen alsdann die verticalen Projectionen, mithin auch die Halbmesser der auf jener Kugelfläche liegenden beiden Parallelkreise der gegebenen Flächen, und der Durchschnittspunkt dieser verticalen Projectionen mit einander ist die verticale Projection der beiden Durchschnittspunkte der Parallelkreise, deren horizontale Projection nun leicht auf der horizontalen kreisförmigen Projection des einen dieser Kreise gefunden werden kann.

c) *Wenn die Axen der Flächen nicht in einer Ebene liegen.*

Nachdem man, wie im vorhergehenden Falle, die Lage der Projectionsebenen bestimmt hat, schneidet man beide Flächen durch eine Reihe von Ebenen, welche zugleich der verticalen Projectionsebene und der gegen die horizontale Projectionsebene geneigten Axe der einen der Umwälzungsflächen perpendiculär sind. Die Durchschnittspunkte der in jeder schneidenden Ebene liegenden Durchschnitte der Flächen mit einander gehören dem gesuchten Durchschnitte an.

Der Durchschnitt einer der Ebenen mit derjenigen Fläche, deren Axe der horizontalen Projectionsebene perpendiculär ist, wird auf die bekannte Weise construirt (Aufg. IV.). Der Durchschnitt derselben Ebene mit der andern Fläche ist ein Parallelkreis, dessen verticale Projection, Radius und Mittelpunkt sich unmittelbar durch den Durchschnitt der schneidenden Ebene mit der Ebene der ebenen Generatrice ergeben, dessen horizontale Projection aber eine Ellipse sein wird, deren grosse, dem Diameter des Kreises gleiche Axe der Projectionsaxe perpendiculär ist, und deren kleine Axe die horizontale Projection des in der Ebene der ebenen Generatrice befindlichen Diameters ist. Vermittelst der bekannten Grösse und Lage der Axen kann nun diese Ellipse construirt werden; will man indessen zu diesem Endzwecke von den Methoden der Projectionslehre Gebrauch machen, so wird auf folgende Weise zu verfahren sein.

Man schlägt die schneidende Ebene mit dem in ihr enthaltenen bekannten Mittelpunkte des Kreises auf eine der Projectionsebenen, z. B. auf die verticale, herab und beschreibt den Kreis aus dem herabgeschlagenen Punkte mit dem bekannten Radius. Alsdann fällt man auf die als Axe dienende Trace aus einer beliebigen Anzahl von Punkten des Umfangs Perpendiculären und construirt die Lage, welche diese Perpendiculären einnehmen würden, wenn die Ebene wieder in ihre frühere

Digitized by Google

Lage gelangt. Sie werden alsdann der verticalen Projectionsebene perpendiculär sein, und ihre horizontalen Projectionen sind es folglich der Projectionsaxe. Trägt man nun die Länge der Perpendiculären von den Punkten des Umfangs bis zur verticalen Trace in der herabgeschlagenen Ebene, von der Projectionsaxe aus, auf die horizontalen Projectionen derselben, wenn die Ebene ihre frühere Lage eingenommen hat, so erhält man eben so viele Punkte der horizontalen Projection des Kreises.

XIV. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Umwälzungsfläche mit einer gewundenen Cylinderfläche zu construiren.

Man construirt die Durchschnittspunkte der Generatricen der gewundenen Cylinderfläche mit der Umwälzungsfläche (Aufg. V.). Diese Durchschnittspunkte bilden den gesuchten Durchschnitt.

XV. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier gewundenen Cylinderflächen zu construiren.

Man construirt die Durchschnittspunkte einer beliebigen Anzahl von Generatricen der einen Fläche mit der andern Fläche (Aufg. VII.). Diese Durchschnittspunkte gehören dem gesuchten Durchschnitte an.

XVI. Aufgabe.

Einer durch den Durchschnitt zweier Flächen gebildeten krummen Linie in einem Punkte auf derselben eine Tangente zu führen.

a) *Wenn die eine der Flächen eine Ebene ist.*

Durch den gegebenen Punkt führt man der krummen Fläche eine berührende Ebene und construirt den Durchschnitt derselben mit der schneidenden Ebene. Dieser Durchschnitt wird die verlangte Tangente sein, indem sich die berührende und die schneidende Ebene nach einer Linie schneiden, welche in einem Punkte der krummen Linie eine Tangente der Fläche ist und zugleich in der Ebene der krummen Linie liegt.

Tab. XI. Fig. 27. Es sei $EE'E''E^3E^4$, $ee'e''e^3e^4$ eine krumme Linie, welche durch die Section einer Ebene GHG' mit einer Kegelfläche gebildet wird, und Ee ein Punkt derselben, durch welchen eine Tangente geführt werden soll.

Da die Basis der Kegelfläche ein Kreis ist, und die durch den gegebenen Punkt gehende Generatrice der verticalen Projectionsebene parallel ist, so wird die berührende Ebene in dem Punkte

Digitized by Google

E e der Kegelfläche der verticalen Projectionsebene perpendiculär. Die verticale Projection des Durchschnitts derselben mit der Ebene G H G′, oder die verticale Projection der gesuchten Tangente, fällt demnach in die verticale Projection d e der berührten Generatrice, und die horizontale Projection des Durchschnitts oder der Tangente in die Linie Q R. In der Ebene der krummen Linie würde die Tangente die Lage der Linie Q r einnehmen, und der Punkt S der herabgeschlagene Berührungspunkt E e sein.

b) *Wenn die krumme Linie eine Curve von gedoppelter Krümmung ist, oder im Allgemeinen durch den Durchschnitt zweier krummen Flächen gebildet wird.*

In diesem Falle führt man durch den gegebenen Punkt auf der krummen Linie jeder der sich schneidenden Flächen eine berührende Ebene. Der Durchschnitt dieser beiden Ebenen mit einander wird, als eine beiden Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkte gemeinschaftliche Tangente, die verlangte Tangente der Durchschnittscurve sein.

Es sei E E′ E″ E‴ E⁴, e e′ e″ e‴ e⁴ ein Durchschnitt zweier Kegelflächen, und E′ e′ ein Punkt, durch welchen dieser krummen Linie eine Tangente geführt werden soll. Tab. XII. Fig. 29

Die durch den gegebenen Punkt gehenden Generatricen sind die Linien C D′, c d′; C F′, c f′, und die Tangenten H I, K L der elliptischen Basen in den Punkten D′, F′ sind die horizontalen Traces der berührenden Ebenen, deren verticale Traces sich in H′ I und K′ L ergeben. Der Durchschnitt beider Ebenen mit einander o g, o′ g′ ist die gesuchte Tangente der gegebenen krummen Linie in dem Punkte E′ e′.

Es ist einleuchtend, dass die Projectionen der Tangenten krummer Linien im Raume Tangenten der correspondirenden Projectionen dieser Linien in den Projectionen des Berührungspunktes sind. Da nämlich, wie wir gesehen haben, eine krumme Linie im Raume jedesmal als der Durchschnitt zweier von ihren projicirenden Linien gebildeter Cylinderflächen anzusehen ist, so sind die projicirenden Ebenen der Tangente berührende Ebenen der correspondirenden projicirenden Cylinderflächen, und die projicirenden Linien des Berührungspunktes sind die berührten Generatricen dieser Flächen. Die Sectionen der projicirenden Cylinderflächen durch die Projectionsebenen, oder die Projectionen der krummen Linie, werden also von den Sectionen der berührenden Ebenen durch jene Ebenen, oder von den Projectionen der Tangente, in den Projectionen des Berührungspunktes berührt. Hieraus folgt, dass man allemal einer krummen Linie eine Tangente führen kann, sobald man im Stande ist, den Projectionen derselben eine Tangente zu führen.

Digitized by Google

XVII. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt ausserhalb einer durch den Durchschnitt zweier krummen Flächen gebildeten Curve von gedoppelter Krümmung derselben eine Tangente zu führen.

Man führt jeder der krummen Flächen aus dem gegebenen Punkte einen umhüllenden Kegel und construirt beide Berührungscurven, so wie den Punkt, in welchem sich diese Curven und die gegebene Curve zugleich schneiden. Eine durch diesen Punkt und den gegebenen Punkt geführte gerade Linie ist die gesuchte Tangente, indem sie als gemeinschaftliche Generatrice beider umhüllenden Kegel beide krummen Flächen zugleich in einem Punkte der Durchschnittscurve berührt und durch den gegebenen Punkt geht.

XVIII. Aufgabe.

Einer durch den Durchschnitt zweier krummen Flächen gebildeten Curve von gedoppelter Krümmung einer gegebenen Linie parallel eine Tangente zu führen.

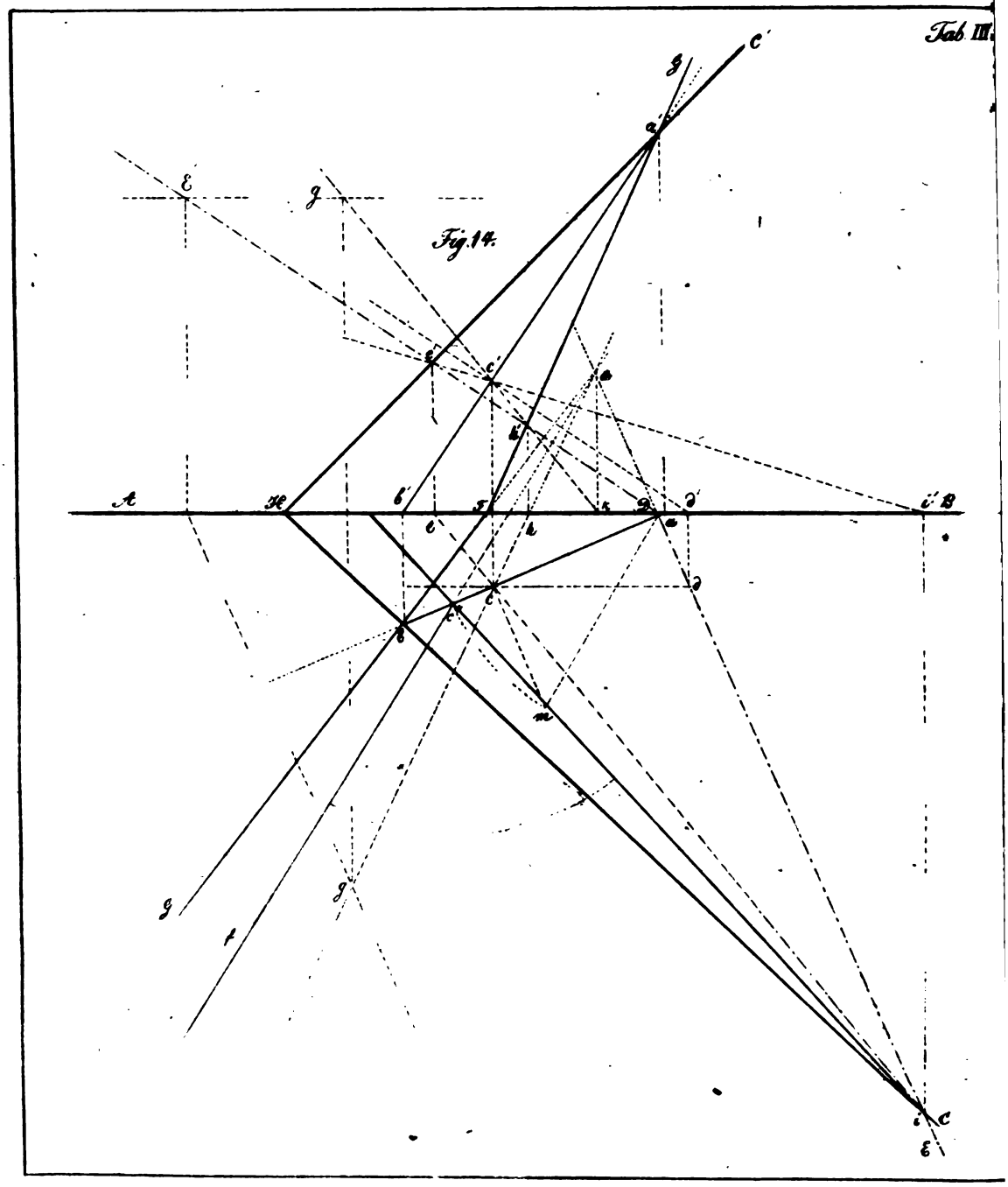
Man führt jeder der krummen Flächen der gegebenen Linie parallel einen umhüllenden Cylinder und construirt die beiden Berührungscurven, so wie den Punkt, welcher diesen beiden Curven und der gegebenen Curve gemeinschaftlich ist. Eine aus diesem Punkte der gegebenen Linie parallel geführte Linie wird die gesuchte Tangente sein, indem sie, als eine beiden umhüllenden Kegelflächen gemeinschaftliche Generatrice, auch beide sich schneidende Flächen zugleich in einem gemeinschaftlichen Punkte der Durchschnittscurve berührt und der gegebenen Linie parallel ist.

So viele Punkte als in dieser und der vorhergehenden Aufgabe den drei Curven gemeinschaftlich sind, eben so vieler Auflösungen sind auch die Aufgaben fähig.

Digitized by Google

Digitized by Google

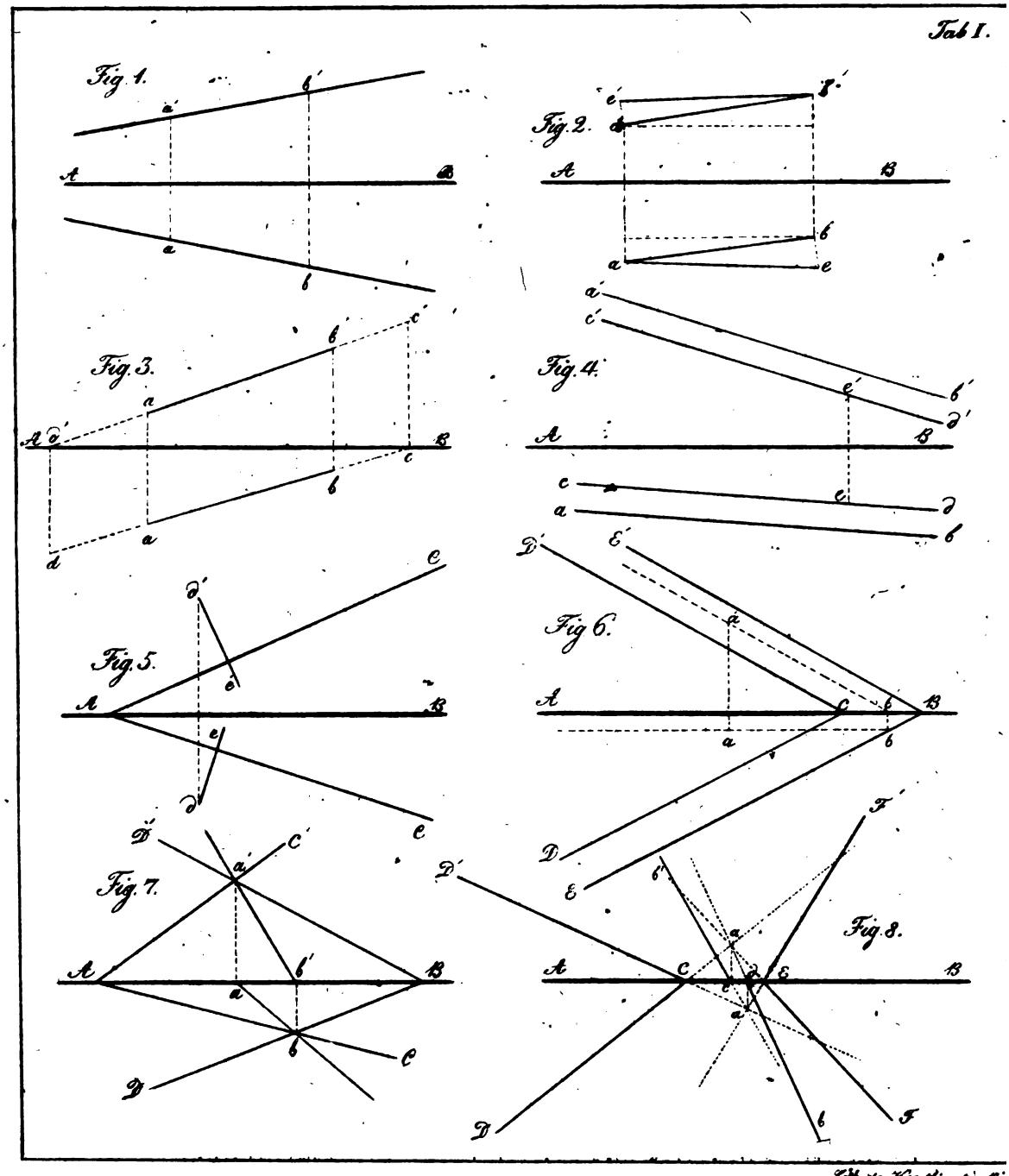
Tab III.



Digitized by Google

Digitized by Google

Tab I.



Lith. de Krestlingk à Rig

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Tab II.

Fig. 9.

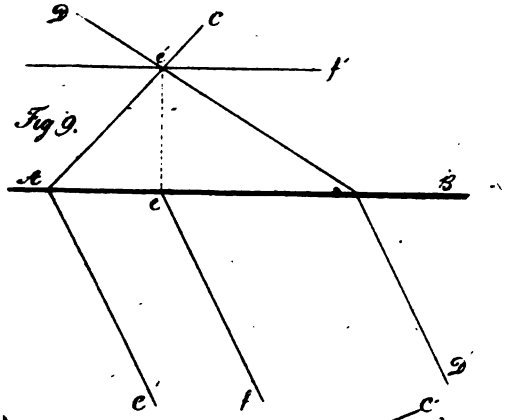


Fig. 10.

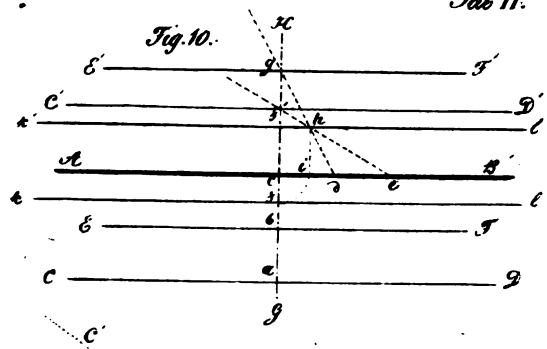


Fig. 11.

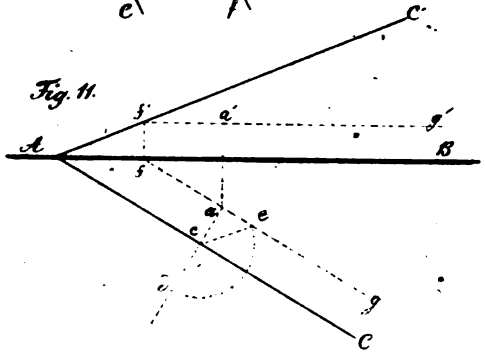


Fig. 12

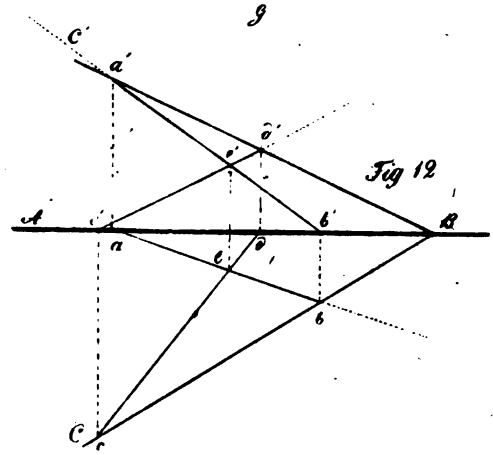
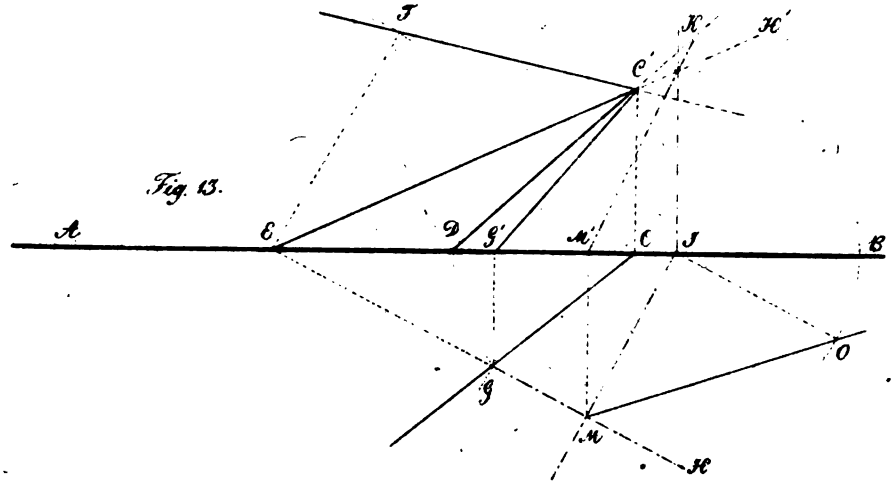
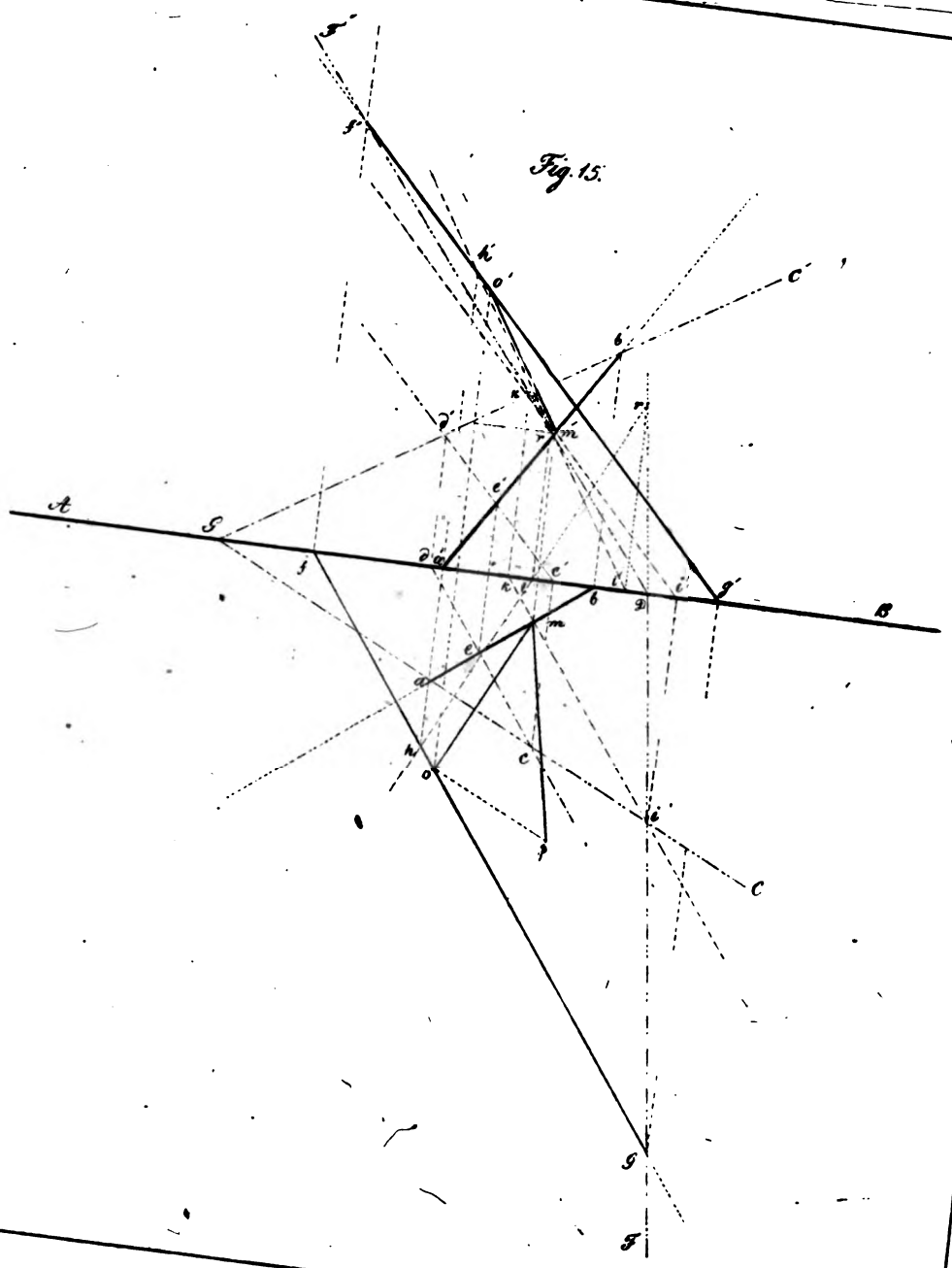


Fig. 13.



Tab IV.

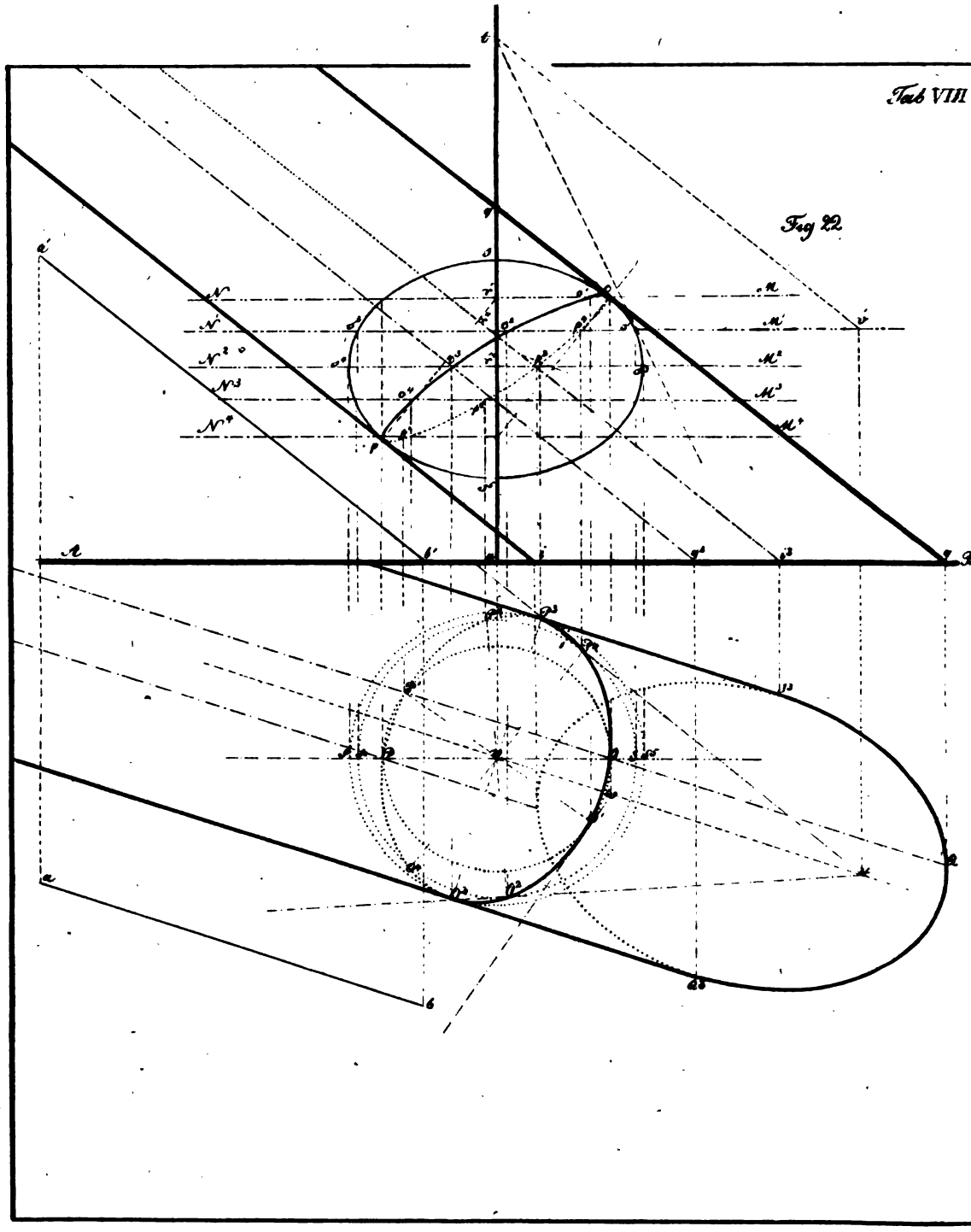
Fig. 15.



Digitized by Google

Digitized by Google

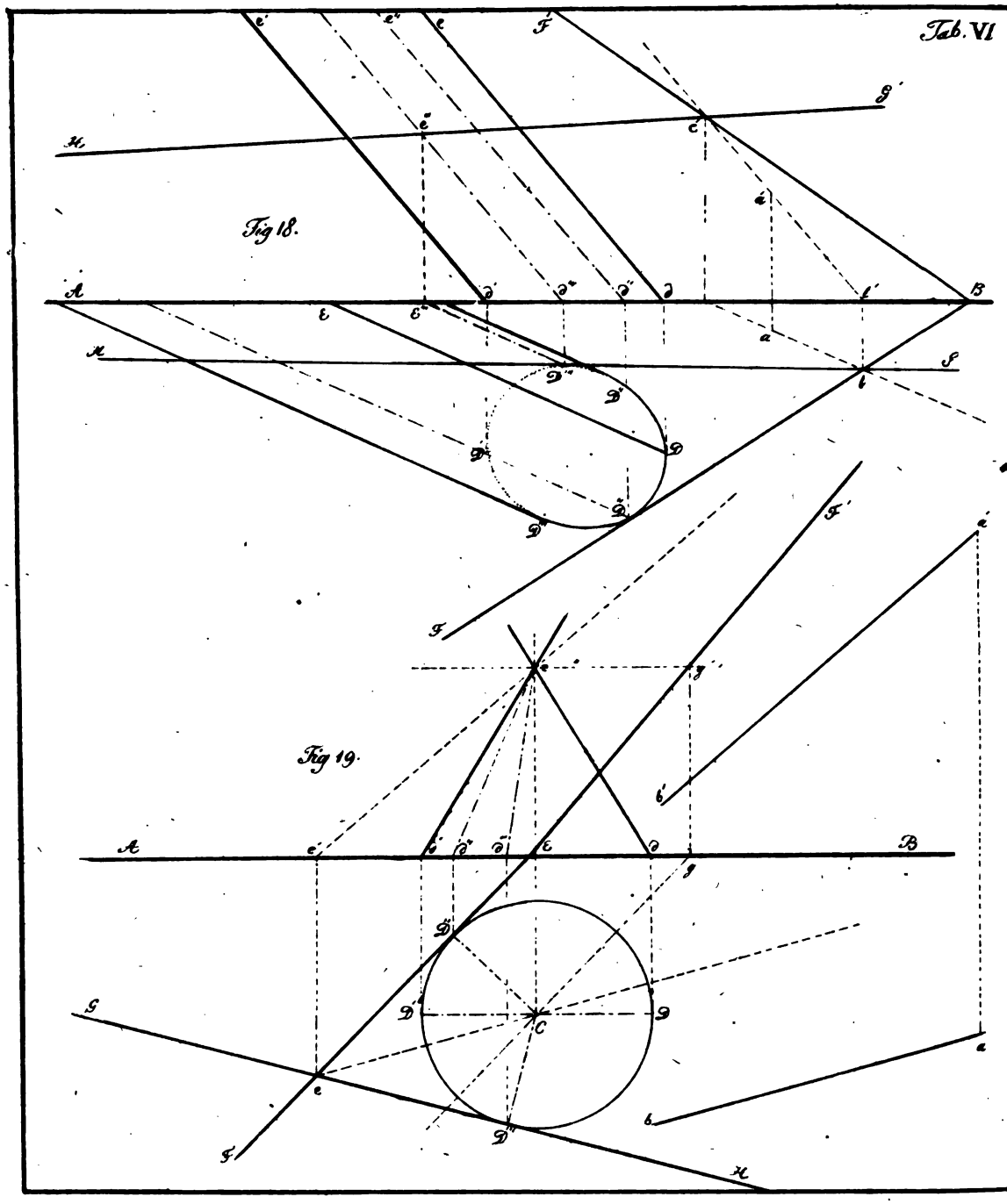
Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. VI



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Tab V

Fig 16

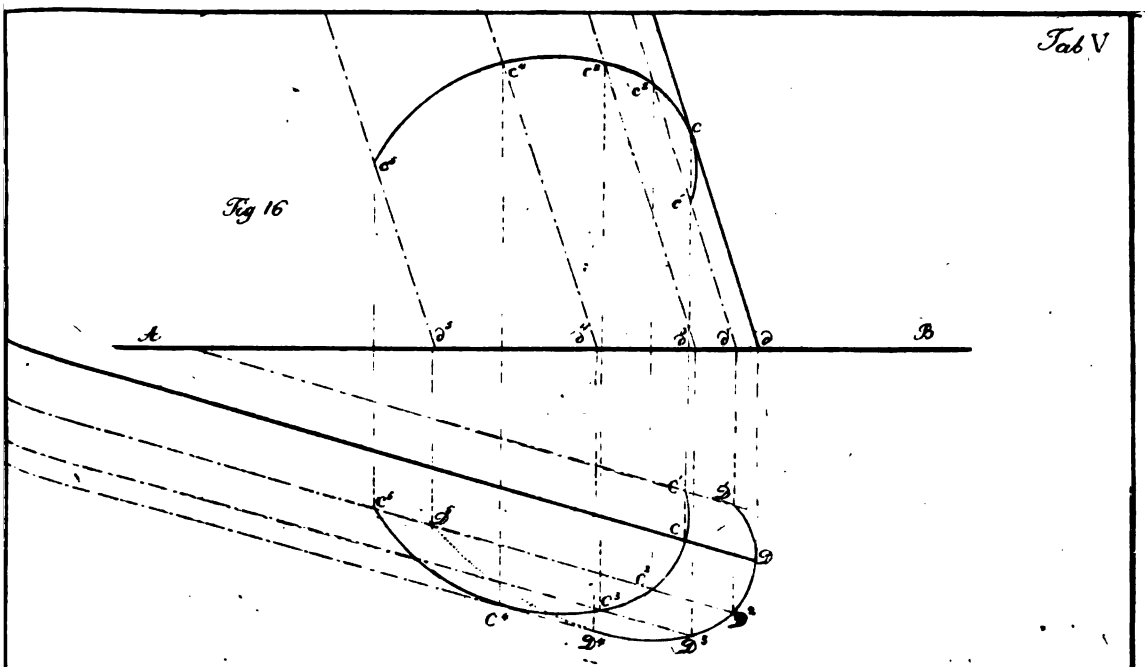
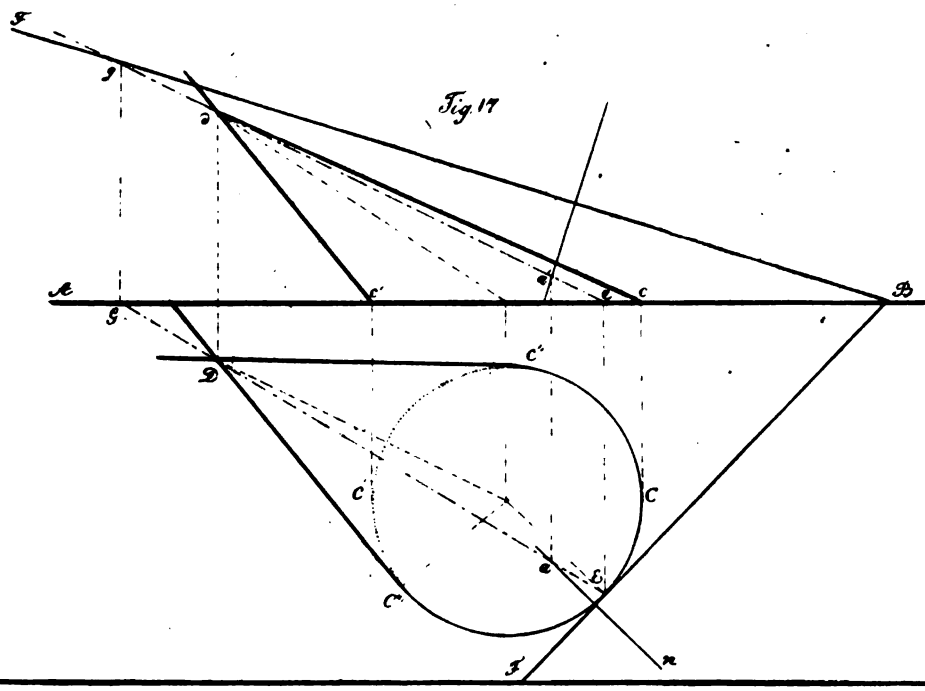
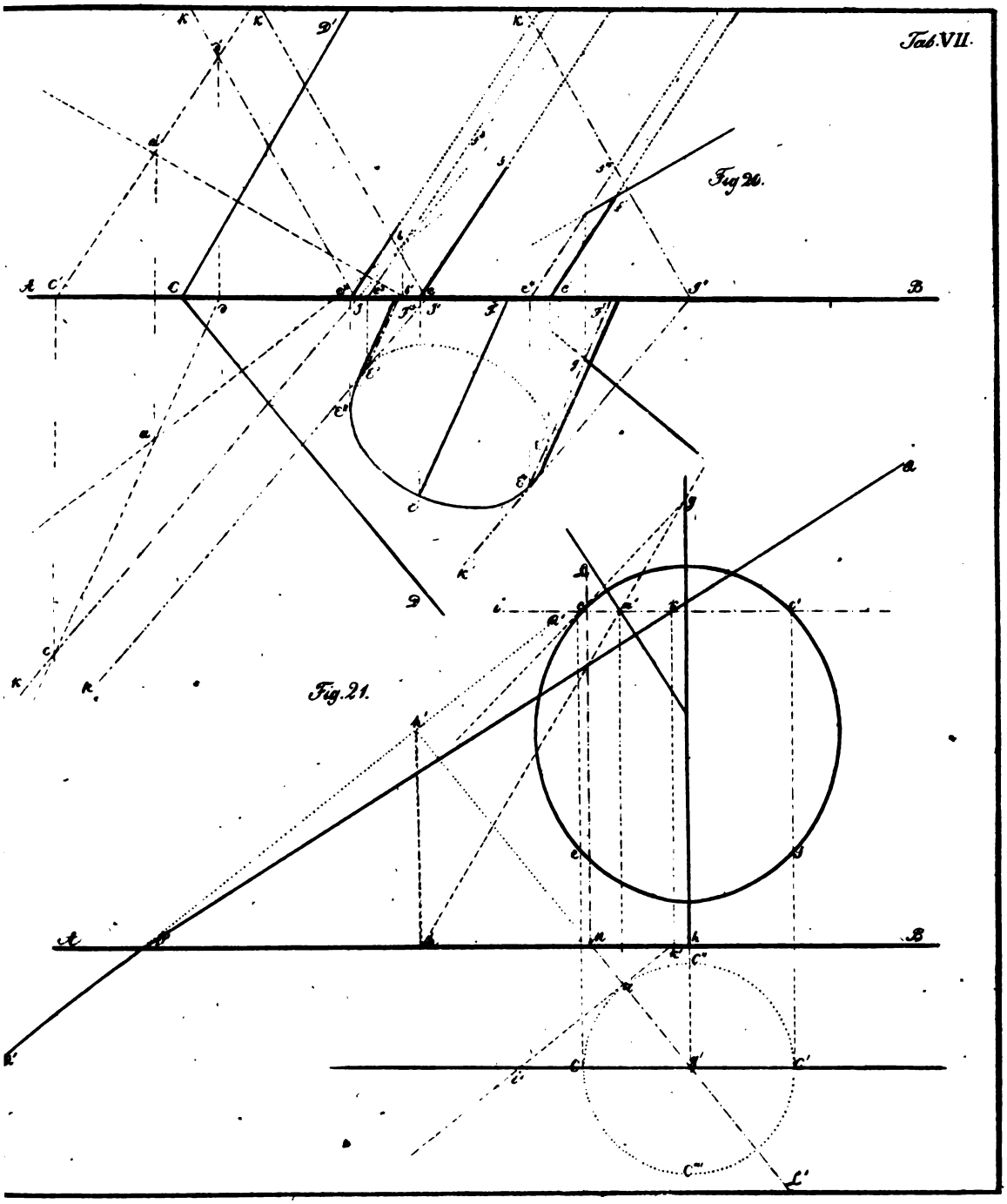


Fig 17



Tab. VII.



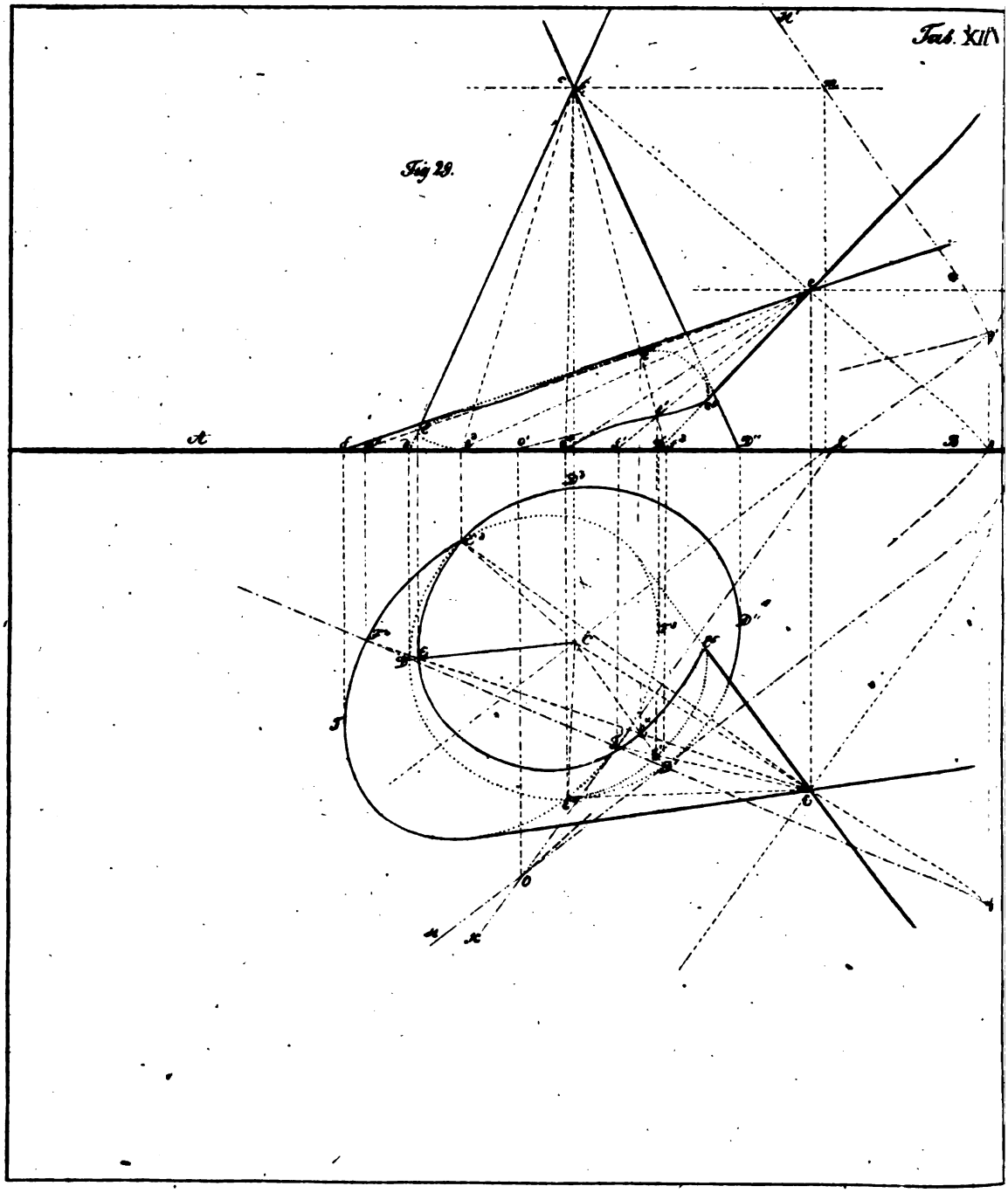
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

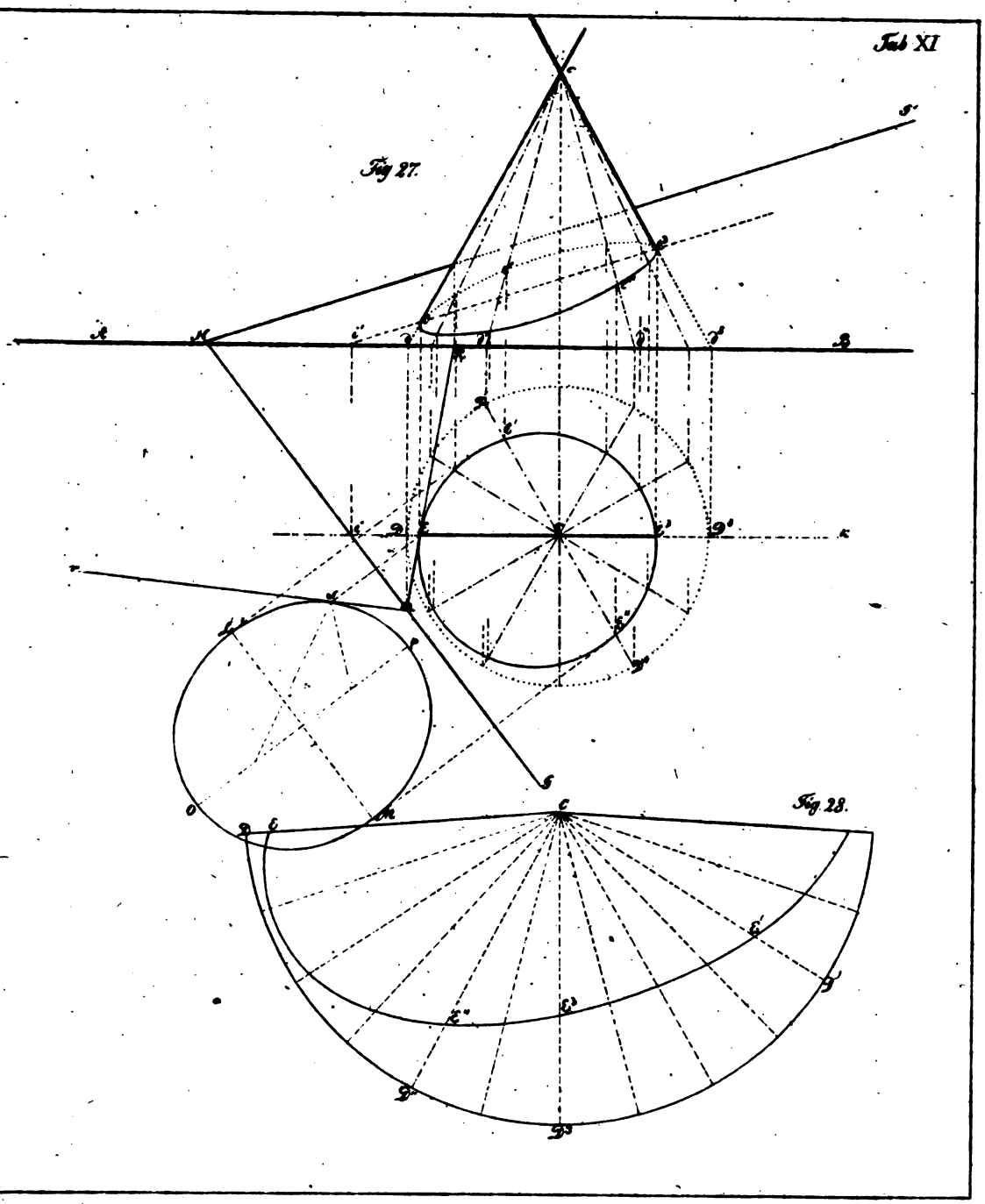
Tab. XII

Fig 29.



Digitized by Google

Tab XI

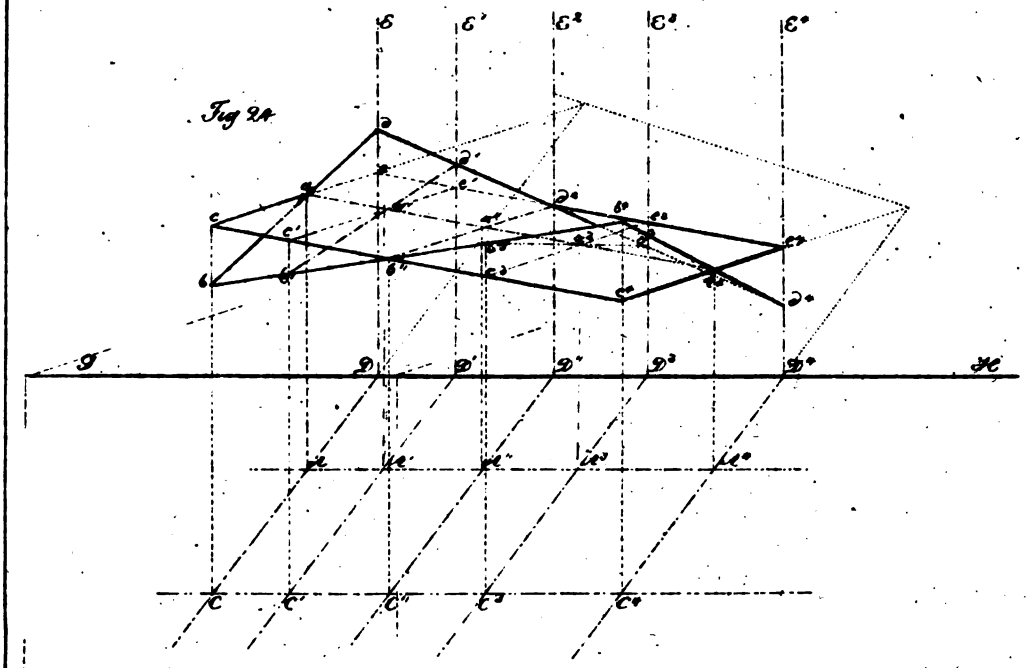


Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. IX.

Fig. 22.



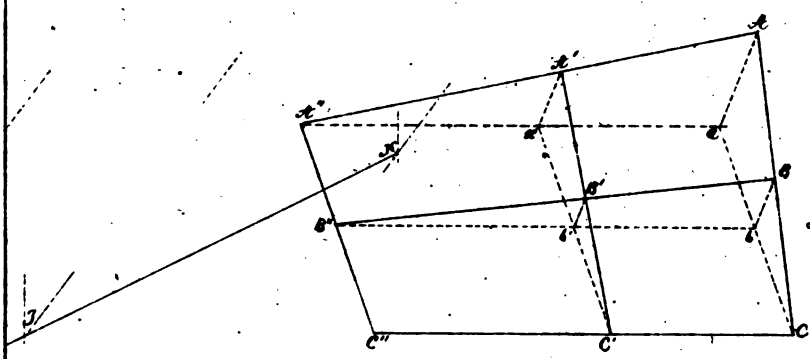
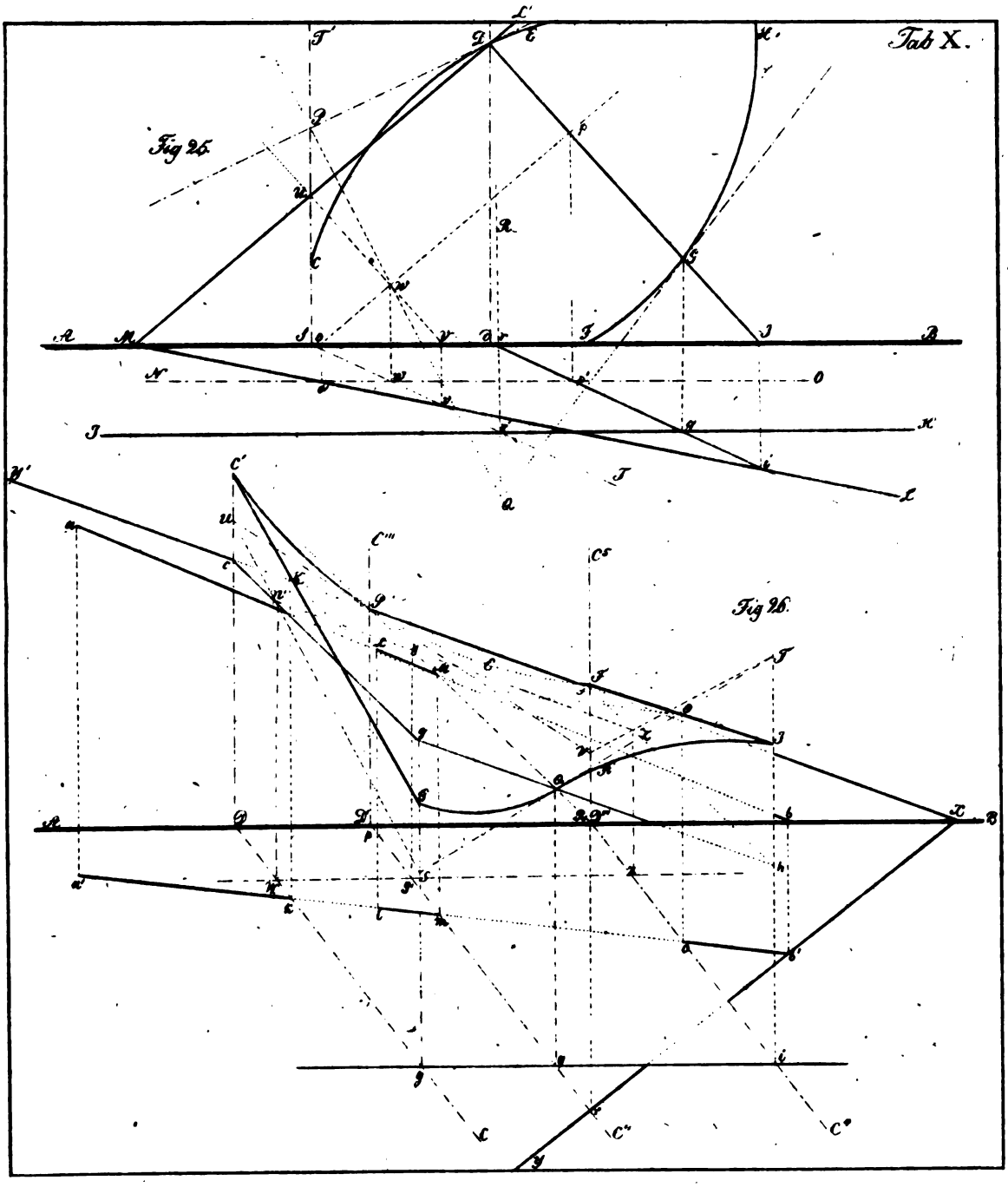


Fig. 23.

Digitized by Google

Tab X.

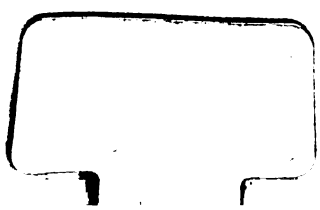


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google